ترسیم‌های هندسی

(ساختمان‌های هندسی)

| احمد فیروزنیا |

ترسیمهای هندسی

(ساختمانهای هندسی)

تألیف : احمد فیروزنیا

نام کتاب : ترسیمهای هندسی (ساختمانهای هندسی)
تالیف : احمد فیروزنیا
ناشر: نشر گزاره
تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه
نوبت چاپ : چاپ اول ، پائیز ۱۳۷۱
لیتوگرافی : دریا
چاپ : چاپخانهٔ شقایق ، تلفن: ۳۱۸۷۴۵

مقدمه

رسم شکلهای هندسی درضمن آنکه بعضی از آنها آسان وعملی به‌نظر می‌رسند، نیاز به‌توان و خلاقیت ذهنی دارند این ترسیم‌ها برای دانش‌پژوهان وهمه کسانی که به‌نحوی باهندسه‌سر و کاردارند یك‌نوع اشتغال فکری وصرف‌وقت‌مطبوع و لذت بخش‌محسوب‌می‌شود.

شایان توجه است که درروزگاران پیشین تعیین‌راه‌حل بـرای رسم‌یك شکل هندسی سالها توجه وتفکر عده‌ای‌ازریاضیدانان‌را به‌خود مشغول داشته وموجب بحث ومجادله‌علمی بین آنان بوده است[1].

دربرنامه آموزش هندسه برای دوره دبیرستان به‌روش ترسیم‌شکلهای هندسی توجه وعنایت لازم مبذول نشده وبه‌رسم‌چندشکل ساده ومقدماتی اکتفاء شده‌است. از این‌لحاظ به مقدارشایستگی این‌شاخه ازهندسه که راهی برای پرورش وتکامل تفکرمنطقی‌است ودرکشف وبروزاستعدادهای‌نهانی نقش‌مؤثری می‌تواند داشته‌باشد، موردتوجه واقع نشده‌است.

رسم شکلهای هندسی‌بااستفاده ازپرگار وخط‌کش‌ورسم بعضی ازشکلها فقط به‌وسیله پرگار ویا تنها بااستفاده ازخط‌کش ازجمله موضوعاتی است‌که یك‌نوع اشتغال وتفویت‌در تمرکز فکراست. این‌کتاب‌که فصل‌اول آن شامل‌موضوع مسئله رسم‌شکل هندسی‌وچگونگی توفیق درحل وبررسی نتیجه‌های حاصل ازآن می‌باشد خواننده را با روش ترسیم شکلهای هندسی آشنا کرده ورهنمودی برای حل مسئله‌هایی از این‌قبیل می‌باشد.

امید است این‌کتاب برای دانش‌پژوهان وهمه‌علاقه‌مندان بـه‌این شاخـه ازریاضیات مفید باشدو نزد استادان ومدرسان علوم‌ریاضی قدریابد.

هرگونه پیشنهاد ونقد واستقصاء صاحب‌نظران وهمکاران‌گرامی‌که سبب برطرف‌شدن نقص واشکال وگامی به‌سوی‌کامل باشد موجب تشکر وسپاس مؤلف است.

احمد فیروزنیا

---

1 ــ اشاره به‌مسئله‌های سه‌گانه (تثلیث‌زاویه- تربیع‌دایره - تضعیف مکعب) می‌باشدکه درکتاب آمده است.

فهرست

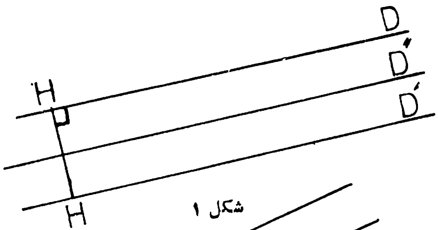
فصل اول

بخش اول

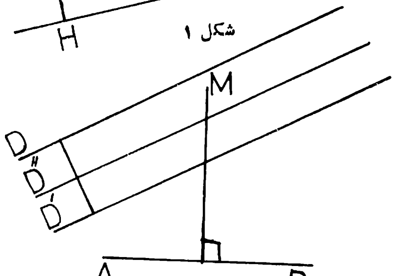
مسئله ترسیمی

مقدمه :

برای رسم یك خط راست داشتن دونقطه از آن کافی مـی‌باشد و برای رسم یك‌شکل هندسی که ازخطهای راست تشکیل شده‌باشد. می‌توان درآغاز یکی‌از پاره‌خطهای آن‌را به وسیله خط‌کش درصفحه رسم کرد وسپس به‌تعیین هریك ازنقطه‌های دیگر شکل که نسبت به این‌خط رسم‌شده وضع معیینی‌دارند پرداخت. درتعیین این‌نقطه‌ها بیشترمنظور بدست‌آوردن نقطه‌ای است‌که دارای دوشرط مفروض (P) و (Q) باشد. دراین‌صورت اگـرتنها شرط (P) رادرنظرگیریم مکان‌هندسی نقطه‌هائی منظوراست‌که دارای شرط (P) باشند واگرفقط به‌شرط (Q) توجه‌کنیم مکان‌هندسی دیگـری مطرح است‌که دارای شرط (Q) باشد. نقطه مطلوب بـایددارای هردوشرط (p) و(Q) باشد لذابرمحل تلاقی این‌دومکان خواهدبود به عبارت دیگر یك‌نقطه مانندMکه دریك صفحه بتواند حـرکت‌کند دارای دووضع آزادی است. مثلا نقطه بریك خط حرکت کند (یك‌وضع آزادی) واین‌خط هـم درصفحه جابه‌جا می‌شود و (یك‌وضع دیگر آزادی) اگر بادرنظرگرفتن شرطی یك وضع از آزادی‌نقطه M را از آن بگیریم این‌نقطه می‌تواند تنها دروضع مشخصی تغییرمکان دهد. مثلا فقط می‌تواندروی یك‌خط (راست‌یامنحنی) جابه‌جا شود. دراین‌صورت مسئله، مربوط به‌مکان هندسی می‌شود. مثلا اگرنقطه M ازیك صفحه دارای این‌شرط باشدکه از دوخط متوازی D و D' همواره به‌فاصله‌های متساوی قرارگیرد این‌نقطه برروی خط D''که عمودمنصف پاره‌خطی است‌کـه



شکل ۱



شکل ۲

فـاصله بین دوخط متوازی D و D' را نشان می‌دهد، واقع‌است. ش ۱ــ (مکان‌هندسی) اگر با در نظر گــرفتن دوشرط هر دو وضع آزادی نقطه M از آن‌گرفته‌شود این نقطه کاملا مشخص می‌شود همین موضوع مسئله تــرسیم هندسی می‌باشد مثلا اگر مطلوب نقطه‌ای باشدکه علاوه برداشتن شرط بالا ازدونقطه مشخص A و B هم واقع درصفحه دوخط D و D' به‌یك‌فاصله باشد نقطه بااین‌شرط برعمودمنصف پاره خط AB واقع‌است. وبا تــوجه به‌شرط قبل نقطه مطلوب برمحل تـلاقی D'' با عمودمنصف پاره خط AB واقع می‌شود ش ــ ۲ شــرط امکان مسئله (وجود نقطه M) آن است‌که امتداد AB بر D'' عمود نباشد.

یکی‌از وسیله‌های مفید ومؤثر درحل‌مسئله‌های ترسیم هندسی شناختن مکان‌های هندسی است چندمکان هندسی راکه‌کاربرد بیشتری دارند درزیر آورده می‌شود.

۱ــ مکان‌هندسی نقطه‌هائی‌که ازدو نقطه‌معیینA وB به‌یك‌فاصله باشند خط عمودمنصف پاره‌خط AB است.[1]

۲ــ مکان‌هندسی نقطه‌هائی‌که ازیك نقطه ثابت به‌فاصله معینی باشند یك‌دایره است‌که آن‌نقطه ثابت‌مرکز وفاصله‌معیین‌شعاع دایره می‌باشد.

۳ــ مکان‌هندسی نقطه‌های‌که ازخط مفروضD به‌فاصله معیین l باشندعبارت است از دوخط متوازی باD وبه‌فاصله l ازآن‌که نسبت به‌خط D قرینه یکدیگراند.

۴ــ مکان‌هندسی نقطه‌هایی‌که فاصله‌های‌آنها ازدوضلع یك‌زاویه متساوی باشد نیمساز آن‌زاویه است.

۵ــ مکان‌هندسی نقطه‌هائی‌کــه ازدوخط متقاطع به‌فــاصله‌های متساوی باشند نیمساز زاویه‌هایی است‌که آن دوخط باهم می‌سازند وعبارت‌است ازدوخط عمودبرهم.

۶ــ مکان‌هندسی‌نقطه‌های‌که از آنها پاره‌خط AB به‌زاویه‌معیین دیده می‌شود دوکمان دایره‌است‌که نسبت به AB متقارن می‌باشند. درحالت خاصی‌که زاویه مذکور قائمه باشند مکان دایره‌ای بـه‌قطر AB است.

۱ــ تمام این مکانهای هندسی از دیدگاه هندسه مسطحه بررسی شده‌اند. «مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه‌که دارای خاصیت ذکرشده می‌باشند موردنظر است.»

۷ـ مکان هندسی نقطه‌هایی‌که مجموع مربعهای فاصله‌های آنها از دونقطه مشخص A وB مقدار ثابتی باشد دایره‌ای است که مرکز آن وسط AB می‌باشد.[1]

۸ـ مکان هندسی نقطه‌هایی‌که تفاضل مربعهای فاصله‌های آنها ازدو نقطه مشخص A وB مقدار ثابتی باشد خطی‌است عمود بر AB.[2]

۹ـ مکان هندسی نقطه‌هایی‌که نسبت فاصله‌های آنها ازدونقطه معیین A وB برابر با مقدارثابت K باشد دایره‌ای است که مرکزش بر AB واقع بوده ونقطه‌های تلاقی آن با AB مزدوجهای توافقی A وB به‌نسبت k می‌باشند.[3]

۱۰ـ مکان هندسی نقطه‌هایی‌که نسبت فاصله‌های آنها ازدوخط D وD' مقدارثابت k باشد، دوخط Δ وΔ' است‌که از نقطه‌تقاطع D وD' گذشته وچهارخط D وD' و Δ وΔ' تشکیل یك‌دستگاه شعاعهای توافقی را می‌دهند.[4]

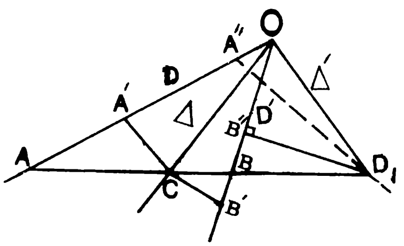
شرطهای لازم برای ترسیم یك شكل

برای حل یك‌مسئله وبه‌ویژه مسئله ترسیم یك‌شكل باید‌توجه‌کردکه تعداد معلوم‌های مفروض یاتعداد شرطهای لازم، برای‌حل مسئله‌کافی می‌باشد یانه. تعدادشرطهای لازم برای بعضی شکلهای هندسی درزیر آورده می‌شود.

---

۱ و ۲ و ۳ـ اثبات این‌مکان‌های‌هندسی وطرز ترسیم آنها درفصل چهارم درضمن حل مسئله‌های رسم مثلث آمده‌است.

(حل مسئله‌های ۱۴۲ و ۱۵۷ و ۱۵۹.



شکل ۳

۴ـ خطی‌رسم‌می‌کنیم که چهارخط همرس D وD' و Δ وΔ' را به‌ترتیب درنقطه‌های A وB وC وD₁ قطع کند وبنا بر فـرض (۱) $\frac{CA'}{CB'}=\frac{D_1A''}{D_1B''}$ دومثلث قائم‌الزاویه AA'C و AA''D₁ نظر به متوازی بودن D₁A'' و CA' باهم متشابه‌اند و می‌توان نوشت.

(۲) $\frac{CA'}{D_1A''}=\frac{CA}{D_1B}$ وهمچنین ازتشابه دو مثلث قائم‌الزاویه CB'B و D₁B''B داریـم (۳) $\frac{CB'}{D_1B''}=\frac{CB}{D_1B}$، رابطه (۱) را می‌توان چنین نوشت. (۴) $\frac{CA'}{D_1A''}=\frac{CB'}{D_1B''}$ ازمقایسه رابطه (۴) باارابطه‌های(۲) و(۳) نتیجه‌می‌شود $\frac{CB}{D_1B}=\frac{CA}{D_1A}$ ویا $\frac{D_1A}{D_1B}=\frac{CA}{CB}$ رابطـه اخیـر نشان می‌دهد‌که دستگاه (O—ABCD₁) یك‌دستگاه شعاعهای توافقی است. (ش۳)

برای تعیین یك‌نقطه دوشرط لازم‌است. نقطه‌را می‌توان فصل مشترك دومکان دانست.
برای تعیین یك‌خط از لحاظ مشخص‌شدن آن به‌کمك دونقطه، چهارشرط واز لحاظ داشتن یك‌نقطه وامتدادخط، سه‌شرط لازم‌است.
برای تعیین‌یك‌دایره از لحاظ موضع‌مرکز واندازه‌شعاع سه‌شرط لازم است، دوشرط برای تعیین مرکز ویکی‌برای تعیین شعاع آن.[1]
چون دربیشترمسئله‌های ترسیمی‌ساده ومقدماتی‌رسم یك‌شکل ازلحاظ اندازه زاویه‌ها وضلعها موردنظر است لذا تعداد معلوم‌ها یاشرطهایی را بررسی مـی‌کنیم‌که ازاین دیدگاه مورداستفاده باشد. دراین‌صورت:
برای رسم یك‌پاره خط تنها یك‌معلوم‌که اندازه آن می‌باشد لازم است.
برای رسم یك‌دایره تنها یك‌معلوم‌که اندازه شعاع آن می‌باشد لازم‌است.
برای رسم یك‌مثلث سه‌شرط لازم‌است. اندازه‌های سه‌ضلع ـ دوضلع ویك‌زاویه، دو زاویه ویك ضلع،[2] وبرای رسم یك‌مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه وجود دوشرط کافی است وبرای مثلث متساوی‌الاضلاع فقط یك‌شرط‌کافی می‌باشد.
یك‌چهارضلعی (چهارضلعی محدب) باوجود پنج شرط رسم می‌شود. (سه‌شرط برای رسم یك‌مثلث حاصل ازسه رأس چهارضلعی ودوشرط برای تعیین رأس چهارم) بایدتوجه داشت‌که اگر دربین پنج معلوم مسئله زاویه‌هم داده شده‌باشد بیشترین تعدادآنها مـی‌تواند سه‌زاویه باشد.

۱ـ باید توجه‌داشت‌که تعداد شرطهای لازم برای تعیین یك‌شکل ازلحاظ انـدازه یا ازنظر وضعیت باهم متفاوت است مثلا برای رسم یك‌پاره خط از لحاظ انـدازه فقط یك‌معلوم‌که طول پاره‌خط باشد لازم‌است‌که دراین‌صورت به‌کمك خط‌کش مدرج این‌پاره خط در صفحه مـربوط به‌شکل رسم می‌شود امـا از لحاظ وضعیت برای ترسیم نیاز به چهار شرط (دو نقطه ابتداء و انتهای آن داده شده‌باشد ودراین‌صورت طول پاره‌خط مشخص است) دارد. درتعیین دایـره از لحاظ اندازه تنها یك‌معلوم‌که همان‌اندازه شعاع دایره باشدکافی است زیـرا دراین‌صورت یك نقطه ازصفحه مربوط به‌رسم شکل‌را مرکز قرارداده وبا داشتن اندازه شعاع، دایره رسم‌می‌شود. اما تعیین دایره ازلحاظ موقعیت درصفحه شکل به‌سه‌شرط نیاز دارد دوشرط برای تعیین مرکز (یك‌نقطه) ویك‌شرط هم برای اندازه شعاع، تادایره رسم می‌شود.
۲ـ باید توجه داشت‌که برای رسم مثلث نمی‌توان سه‌جزء معلوم را سه‌زاویه درنظرگرفت زیرا بامعلوم بودن مقدار دو زاویه، اندازه زاویه سوم مشخص است ولـذا تعداد معلوم‌هـای مسئله (شرطهای مسئله) سه نمی‌باشد وفقط دومعلوم داده شده‌است. سه‌حالت ذکـر شده دربالا به‌نام حالتهای‌کلاسیك، رسم مثلث نامیده‌شده‌است، شرطهایی‌که ممکن‌است برای رسم مثلث داده‌شود بسیار متنوع وگوناگون می‌باشدکه درضمن حل مسئله‌های مربوط به‌ترسیم مثلث آمده‌است.

اگر نوع خاصی از چهارضلعی باید رسم شود دراین‌صورت تعداد شرطهای لازم کمتر از پنج‌شرط می‌باشد. مثلا تعریف‌آن خود یك‌شرط بوده وبرای تعیین این‌نوع چهار ضلعی، چهارشرط لازم‌است. مانندچهارضلعی محاطی، ذوزنقه (حداقل یکی‌از معلومها باید ضلع باشد) برای‌رسم متوازی‌الاضلاع یاذوزنقه متساوی‌الساقین سه‌شرط (حداقل یکی‌ضلع بوده ودراین‌صورت دومعلوم دیگر دوزاویه اصلی نباشد) لازم وکافی است.

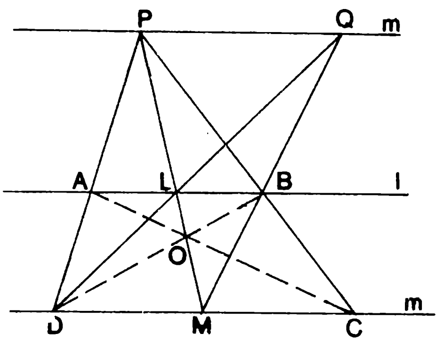
برای مستطیل ولوزی دوشرط برای‌مستطیل هیچکدام ازدو شرط نباید زاویه باشد و برای لوزی حداقل یکی‌باید ضلع باشد. وبرای مربع یك‌شرط (این‌شرط نباید زاویه‌باشد) لازم است هرچهار ضلعی بارسم قطرها به‌چند مثلث تجزیه می‌شود ازاین لحاظ رسم‌چهار ضلعی‌ها به‌رسم مثلث منجرمی‌شود.

ابزارهای ترسیم شکل- خط‌کش (خط‌کش مدرج) وپرگار دووسیله اصلی واساسی برای ترسیم‌های هندسی می‌باشند. خط‌کش برای رسم خطهای راست وازپرگار برای‌رسم دایره‌ها استفاده مـی‌شود. برای تعیین نقطه‌ای از شکل‌که دربیشتر مسئله‌ها از رسم دومکان هندسی بدست می‌آید پرگارکاربرد دارد. از ابزارهای دیگر مانندگونیا وپیستوله دررسم خطهای راست وزاویه قائمه وبعضی ازمنحنی‌ها استفاده می‌شود دربعضی ازترسیم شکلهای بنیادی هندسی سعی برآن شده‌است‌کـه تنها بااستفاده ازپرگارشکل رامشخص‌کنند ازاین مسئله‌ها تعیین مرکزدایره مفروض باکاربرد فقط پرگارمی‌باشدکه مسئله حل شده وترسیم‌آن مفصل می‌باشد، همچنین بعضی‌از شکلهای هندسی‌را باخط‌کش غیرمدرج می‌توان رسم‌کرد بازهم ترسیم آنها مفصل‌است.[1]

۱ــ با استفاده ازخط‌کش غیرمدرج خطی رسم‌کنیدکه بادو خط متوازی مفروض l و m موازی باشد وازنقطه مفروض p واقع درصفحه آنها بگذرد.

حل ــ از p دوخط رسم می‌کنیم‌که l را درA وB وm را درC وD قطع‌کنند. AC و BD رارسم می‌کنیم‌که درO متلاقی‌شوند. (ش۴) خط po را می‌کشیم‌که l را در L و m را در M قطع کنند خطهای DL و MB (یـا CL و MA) را رسم می‌کنیم‌که در Q تلاقی کنند. خط PQ که رسم شود همان‌خط مطلوب می‌باشد. زیرا ازتشابه دو مثلث PLB و PMC همچنین دو مثلث PAL و PDM داریم:

$$\frac{AL}{DM}=\frac{PL}{PM}=\frac{LB}{MC} \quad (1)$$



شکل ۴

از تشابه دومثلث ALO و OMC وهمچنین دو مثلث BLO و MDO داریم،

←

استفاده ازهرابزار برای رسم‌شکلها توأم باخطااست. اما درموردهایی خطای حاصل کاربرد پرگارکمتر ازخطای پدیدآمده ازبکاربردن ابزارهای دیگراست.

بعضی‌از شکلهای‌هندسی را باخط‌کش وپرگارنمی‌توان رسم‌کرد ولی چون به‌ترسیم این‌شکلها نیازاست بااستفاده از خط‌کش وپرگار یا ابزارهای دیگر شکلی رسم می‌شودکه بشکل اصلی خیلی نزدیك است ودراین صورت ازخطای مربوط به‌ترسیم آن چشم‌پوشی می‌شود.

موضوع بعضی‌از ترسیم‌های هندسی‌که درسابق مطرح شده ومدتهای مدید (قرنها) فکر ریاضیدانها به‌حل‌آن مشغول بوده‌است شرح مفصلی داردکه درج آن دراین‌مختصر

$$\frac{AL}{MC}=\frac{LO}{OM}=\frac{LB}{DM} \quad (۲)$$

ازمقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شودکه

$$\frac{AL}{LB}=\frac{DM}{MC}=\frac{MC}{DM} \quad (۳)$$

از رابطه (۳) نتیجه می‌شود که $AL=LB$ و $DM=MC$ دومثلث QDM و QLB متشابه‌اند وداریم:

$$\frac{LB}{DM}=\frac{QB}{QM} \quad (۴)$$

وچون $DM=MC$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{LB}{CM}=\frac{QB}{QM} \quad (۵)$$

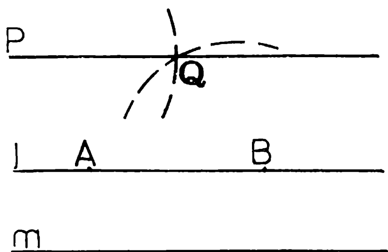
ازمقایسه رابطه‌های (۱) و (۵) نتیجه می‌شود.

$$\frac{QB}{QM}=\frac{PL}{PM}$$

و بنا برعکس قضیه تالس معلوم می‌شود که PQ با LB یعنی با l و m موازی می‌باشند.

تبصره ــ ممکن است نقطه p بین دوخط‌موازی l و m واقع باشدکه بازهم ترسیم بالا واستدلال موازی‌بودن PQ با l و m به‌همین صورت است.

تبصره ــ حال همین ترسیم را بـا استفاده از پرگار انجام می‌دهم.



شکل ۵

حل ــ دونقطه A و B را بطور اختیاری بر l انتخاب می‌کنیم به‌مرکز p وشعاع AB کمانی رسم می‌کنیم سپس به‌مرکز B و شعاع AP کمان دیگری رسم می‌کنیم محل تلاقی این‌دوکمـان را نقطه Q می‌گذاریم PQ موازی با AB است زیرا درچهارضلعی $ABQP$ ضلعهای روبرو، باهم برابرند ولذا شکل متوازی‌الاضلاع است. (شکل۵)

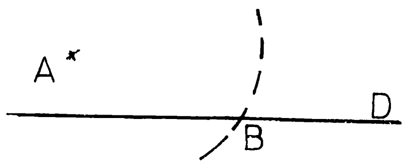
نمی‌گنجد بعضی از این مسئله‌ها مشخص شده‌است که قابل‌حل نمی‌باشند و نمی‌توان آنها را ترسیم کرد از جمله مسئله‌های معروف به‌مسئله‌های سه‌گانه که عبارتند از تثلیث زاویه، تربیع دایره، تضعیف مکعب. تثلیث زاویه یعنی تقسیم یك زاویـه غیرمشخص به‌سه قسمت متساوی، تربیع‌دایره یعنی رسم‌مربع معادل بادایره مفروض، (ترسیم یك‌پاره‌خط به‌طول π) تضعیف[۱] مکعب یعنی ترسیم یال یك‌مکعب که حجم آن دوبرابر حجم مکعب به‌طول یال معیین باشد. (ترسیم $\sqrt[3]{2}$ یا $a\sqrt[3]{2}$) ضمن بررسیهایی که در مورد مسئله‌های ترسیم هندسی انجام شده این نتیجه بدست آمده‌است که آن‌مسئله‌هایی ازهندسه که حل آنها از راه هندسه تحلیلی به‌حل معادله درجه‌سوم ویا معادله‌هایی بادرجه بالاتر وغیرقابل تبدیل به‌معادله‌های ساده‌تر منتهی گردد از راه ترسیم به‌وسیله خط‌کش و پرگار میسر نمی‌باشد. درمقدمه این‌کتاب ترسیم چند مسئله ساده ومتعارف آورده شده‌که پیش‌نیاز ترسیم‌هایی می‌باشد کـه درفصلهای دیگر آمده است.

۱ ـ تضعیف: به‌معنی‌دوبرابر کردن و ازلغت‌ضِعف (ضِعف ـ دو برابر هرچیز، دوچندان) آمده‌است.

بخش دوم

ترسیمهای ساده و مقدماتی

۱ـ تعیین نقطه‌ای بر یك خط داده شده که به‌فاصله معینی از یك نقطه مفروض باشد.

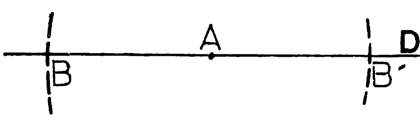


شکل ۶

حل ـ یك‌مکان نقطه‌مطلوب، خط مفروض D است ومکان دیگرآن دایره‌ای به‌مرکز A وشعاع برابر بامقدار معیین مـی‌باشد بنا براین دایره‌ای به‌مرکز A و شعاع مقدار معیین رسم می‌کنیم تاخط D راقطع‌کند، نقطه تلاقی، نقطه مطلوب است. (ش۶) تعیین نقطه B وقتی میسر است‌که خط D بادایره‌ای‌که رسم مـی‌کنیم نقطه مشترك داشته‌باشد وتعداد جوابها حداکثر دومی‌باشد.

اگر دایره رسم شد. برخط D مماس‌شود مسئله فقط یك‌جواب دارد.

تبصرهـ درحالتی‌که نقطه A برخط D واقع بـاشد مسئله همواره دو جواب داردکه دونقطه B و B' می‌باشند ودردوطرف A قرار دارند. (ش ۷)

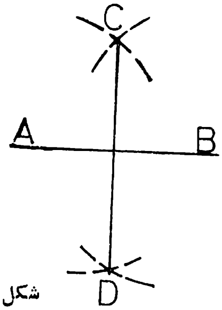


شکل ۷

تبصره ـ درترسیم‌ها تمام دایره (یا دایره‌ها) رسم نمی‌شوند بلکه‌کمانـی ازآن در نزدیکی نقطه تلاقی باشکل دیگر (خط، دایره) رسم می‌شود.

۲ـ عمودمنصف یك‌پارهٔ خط را رسم‌کنید.

حلـ دو دایره متساری به‌مرکزهای‌دوسر پاره‌خط وبا شعاع بزرگتر ازنصف پاره‌خط

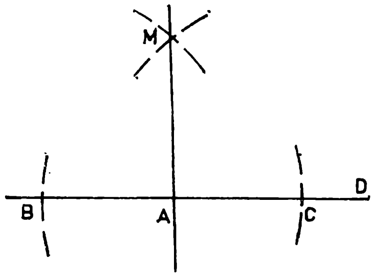


شکل ۸

داده‌شده رسم می‌کنیم، این دودایره در دو نقطه متقاطع می‌شوند.[۱] خطی که دو نقطه تلاقی را بهم وصل می‌کند عمود منصف پاره خط است. (ش۸)

۳ـ نصف کردن یك پاره خط

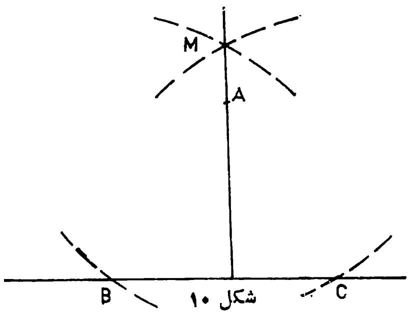
حل ـ برای تقسیم یك پاره خط به دو قطعه متساوی، عمود منصف پاره خط را رسم می‌کنیم، پاره‌خط به‌دو پاره برابر تقسیم می‌شود. (ش۹) حال اگر بخواهیم یك پاره خط را به چهار قسمت متساوی تقسیم کنیم کافی است نخست آنرا نصف کرده و سپس هریك از پاره خطهای پدید آمده را نصف کنیم می‌توان این روش را برای تقسیم یك پاره‌خط به هشت قسمت متساوی و شانزده قسمت متساوی و بالاخره به 2^m پاره‌خط برابر انجام داد.



شکل ۹

۴ـ رسم خط عمود بر یك خط از یك نقطه.

حل ـ نقطه ممکن است بر خط مفروض واقع یا در خارج آن باشد. به‌مرکز نقطه مفروض A و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا در دو نقطه B و C خط مفروض D را قطع کند. A یك نقطه از عمود منصف پاره خط BC می‌باشد. با رسم دو دایره متساوی متقاطع به مرکزهای B و C نقطه M را که از B و C به یك فاصله است تعیین می‌کنیم AM عمود منصف BG است پس خطی است که از نقطه A بر D عمود شده است.[۲] (ش ۹ و ۱۰)

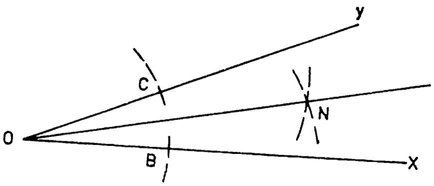


شکل ۱۰

۱ــ چون طول خط المرکزین دودایره کوچکتر ازمجموع دوشعاع می‌باشد دو دایره متقاطع می‌شوند، چهارضلعی ACBD لوزی است وقطرها عمودمنصف یکدیگراند.

۲ــ رسم خط عمود بریك خط ازیك نقطه مفروض را می‌توان به‌طریق زیر به‌کمك گونیا وخط‌کش ←

۵ـ رسم نیمساز زاویه



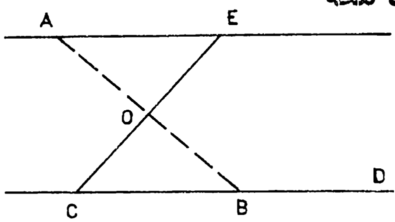
شکل ۱۱

حل- به‌مرکز رأس زاویه و به‌شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقطه‌های تلاقی آن‌را با ضعلهای زاویه تعیین می‌کنیم B و C بدست می‌آید. (ش ۱۱)

حال‌عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم یك‌نقطه ازاین عمودمنصف رأس‌زاویه می‌باشد نقطه‌دیگر آن N را بارسم دودایره بدمرکزهای B و C وشعاعهای متساوی بطوریکه دو دایره متقاطع باشند تعیین می‌کنیم ON نیمساز زاویه مفروض است زیرا مثلث BOC متساوی‌الساقین وعمودمنصف قاعده نیمساز زاویه رأس مثلث می‌باشد.

بارسم نیمساز یك‌زاویه وسپس با ترسیم نیمسازهای دوزاویه پدیدآمده وتکرار این کار می‌توان زاویه‌ای را به ۲^n زاویه برابر تقسیم کرد.

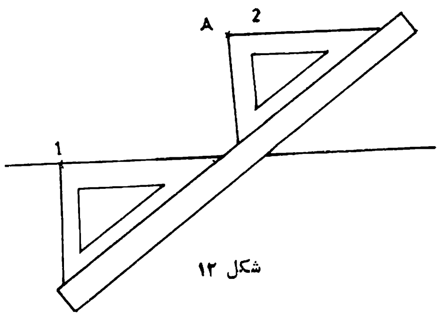
۶ـ رسم خط موازی باخط مفروض ازیك نقطه



شکل ۱۳

حل- خط D و نقطه A خارج از آن داد شده است می‌خواهیم از نقطه A خطی‌موازی خط D رسم‌کنیم. از نقطه A به‌نقطه دلخواه B واقع برخط D وصل‌کرده واز نقطه‌دیگری مانند C واقع برخط D به وسط AB وصل کرده وآن‌را به‌اندازه خود تانقطه E (ش ۱۳) امتداد می‌دهیم AE موازی D است زیرا چهارضلعی ACBE متوازی‌الاضلاع است (چون دوقطر منصف یکدیگراند).[۱]

←



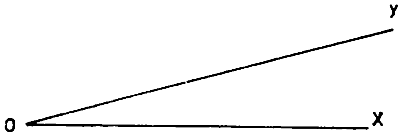
شکل ۱۲

انجام داد. گونیا را دروضع (۱) چنان قرار می‌دهیم که یك‌ضلع‌زاویه قائمه آن‌برخط مفروض D واقع باشد، سپس خط‌کش را بر صفحه کاغذ چنان قرار می‌دهیم که یك‌طرف آن بروتر گونیا تکیه‌کند. حال‌گونیا را درصفحه‌کاغذ می‌لغزانیم بطوریکه وتر آن از لبه خط‌کش جدا نشود وقتی ضلع گونیا که برD عمود است، برنقطه مفروض A (ش ۱۲) بگذرد، خطی‌که با استفاده ازاین ضلع گونیا رسم شود برD عمود خواهد بود.

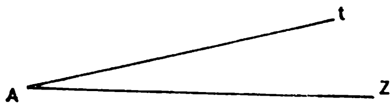
۱ــ برای رسم خط موازی بایك خط چندراه دیگر وجود دارد، که دوطریق آن قبلا دراین کتاب آمده‌است و به‌وسیله گونیا وخط‌کش این ترسیم نیز میسر می‌باشد.

۷- رسم زاویهٔ مساوی بازاویه مفروض

حل- زاویه xoy داده‌شده‌است(ش ۱۴ الف) می‌خواهیم زاویه‌ای مساوی بااین زاویه رسم‌کنیم کافی است از نقطه دلخواه A دوخط متوازی با ox وoy رسم‌کنیم ZAT مساوی بازاویه xoy است (ش۱۴) اگر خط Δ داده شده باشد وبخواهیم زاویه‌ای مساوی بازاویه xoy رسم‌کنیم که یک‌ضلع آن خط Δ باشد به طرین زیرعمل می کنیم.

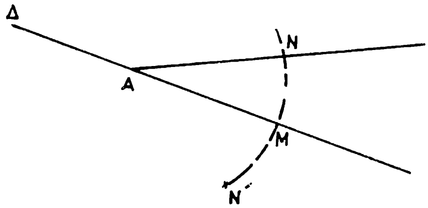


شکل ۱۴ الف

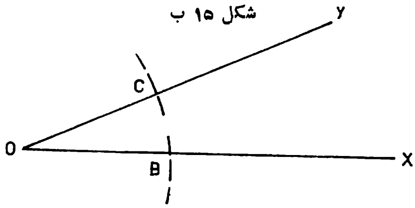


شکل ۱۴ ب

به‌مرکز o و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ox و oy را درB وC قطع‌کند. بـه مرکز A وهمین شعاع دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را درM قطع‌کند. به‌مـرکز M وشعاع BC (ش۱۵) دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره رسم شده را (به مرکز A و شعـاع OB) در نقطه N قطع‌کند NAM زاویه مساوی بـا زاویه xoy است زیـرا دو مثلث متساوی‌الساقین BOC وMAN درسه‌ضلع نظیر به نظیر متساویند.



شکل ۱۵ ب



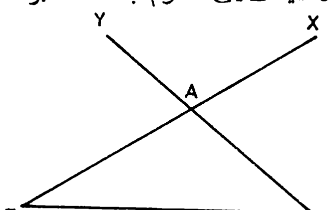
شکل ۱۵ الف

تبصره- دایره به‌مرکز M و شعاع BC دایره رسم شده قبلی را (دایره به‌مرکز A وشعاعOB) در دونقطهN وN' واقع در دوطرف Δ قطع می‌کند براین دو زاویهMAN و MAN' زاویه‌های مطلوب می‌باشند.

۸- ترسیم مثلث

(۱) مثلثی را رسم‌کنیدکه ازآن دو زاویه وضلع بین‌آنها معلوم است.

فرض می‌کنیم ازمثلث ABC ضلع $BC=a$ ودوزاویه BوC معلوم بـاشند. برای رسم مثلث ابتداء پاره‌خطی به‌اندازه $BC=a$ رسم کـرده واز نقطه B نیم‌خط Bx را چنان رسم می‌کنم که با BC زاویه‌ای مساوی با B بسازد واز C ودر همان طرف پاره‌خط BC، نیم‌خط Cy را طوری رسم می‌کنیم که با CB

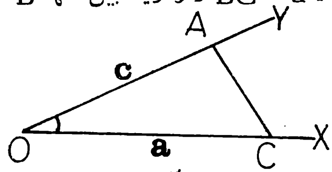


شکل ۱۶ ه

زاویه مساوی با C تشکیل دهد از برخورد این‌دو نیم خط مثلث ABC پدید می‌آید (ش ۱۶) که جواب مسئله‌است. شرط امکان مسئله آن است که $\hat{B}+\hat{C}<180^\circ$ باشد.

(۲) مثلثی رسم کنید که از آن دوضلع و زاویه بین آنها معلوم است.

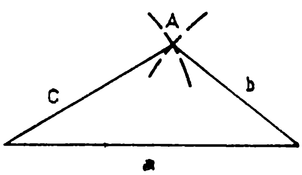
فرض می‌کنیم ازمثلث ABC ضلع $AB=c$ و $BC=a$ و زاویه بین‌آنها $\hat{B}$ معلوم باشد. برای رسم مثلث ابتداء زاویه xBy را مساوی با B رسم می‌کنیم و بعد روی یکی‌از ضلعها پاره‌خط $BC=a$ وروی ضلع دیگر آن پاره‌خط $BA=c$ راجدا می‌کنیم A را به C وصل می‌کنیم ABC مثلث مطلوب‌است. (ش۱۷) شرط امکان مسئله آن است که زاویه $\hat{B}$ از ۲ قائمه کوچکتر باشد.



شکل ۱۷

(۳) مثلثی را رسم کنید که از آن سه‌ضلع داده شده باشد.

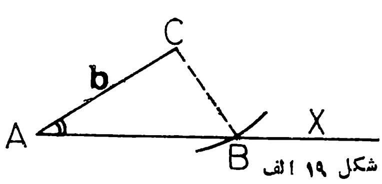
ابتداء یکی‌از ضلعهای‌مثلث مثلاً $BC=a$ را رسم کرده و سپس به مرکز B و شعاع $BA=c$ یك دایره و به مرکز C و شعاع $CA=b$ دایره دیگری رسم می‌کنیم نقطه مشترك این‌دو دایره رأس سوم مثلث است (ش ۱۸) شرط امکان مسئله آن‌است که دو دایره رسم شده یکدیگر راقطع کنند ولازم وکافی است که $|c-b|<a<b+c$ بایدتوجه داشت که دودایره یکدیگر را در دونقطه A و A' قطع می‌کنند ولی چون دو مثلث متساویند مسئله تنها یك‌جواب دارد.



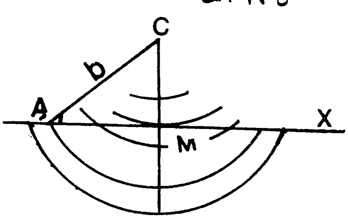
شکل ۱۸

(۴) مثلثی رسم کنید که از آن دوضلع و زاویه روبرو به‌یکی از آنها داده شده‌است.

ازمثلث ABC، دوضلع $BC=a$ و $AC=b$ وزاویه A داده شده‌است ابتداء زاویه A را رسم می‌کنیم و روی یك‌ضلع آن AC را مساوی با b جدا کرده سپس به‌مرکز C وشعاع a کمانی ازدایره را رسم می‌کنیم تاضلع دیگر یعنی Ax را درنقطه B قطع کند مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۱۹ الف)



شکل ۱۹ الف

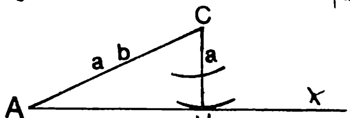


شکل ۱۹ ب

بحثـ شرط امکان وتعداد جوابهای مسئله بستگی به‌این داردکه دایرهٔ به‌مرکز C وبشعاع a ضلع دیگر زاویه راقطع کند یا با آن مماس باشد ویا آن را قطع نکند. برای این بحث

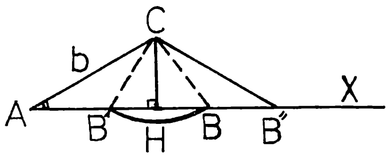
برحسب آنکه زاویه A حاده یاقائمه یامنفرجه باشد سه‌حالت متمایز وجود دارد.

حالت‌اول- زاویه A حاده‌است $A<90^\circ$، عمود CH را بر Ax فرو می‌آوریم برحسب آنکه $a<CH$ یا $a=CH$ یا $a>CH$ باشد دایره به‌مرکز C وشعاع a خط Ax را قطع نمی‌کند یا برآن مماس می‌شود ویاآن‌را در دونقطه قطع می‌کند، باتوجه به‌آنکه نقطه B باید روی نیم‌خط Ax باشد «نیم خط سمت راست نقطهA» زیرا اگر درسمت‌چپ نقطه A واقع‌شود زاویهCAB برابر با زاویه مفروض نمی‌باشد و مساوی مکمل این‌زاویه می‌شود.



شکل ۱۹ ج

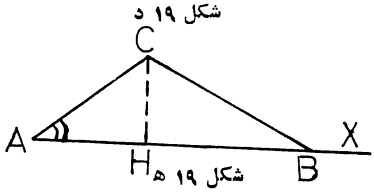
مسئله جواب ندارد $a<CH$



شکل ۱۹ د

$a=CH$ یك جواب دارد «مثلث قائم‌الزاویه CHA»

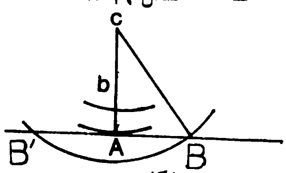
$CH<a<b$ دوجواب‌دارد (مثلث‌های ABC و AB'C)



شکل ۱۹ هـ

$a=b$ یك جواب (مثلث متساوی‌الساقین AB''C)

$a>b$ یك جواب (مثلث AB'''C)



شکل ۱۹ و

حالت دوم — $A=90^\circ$

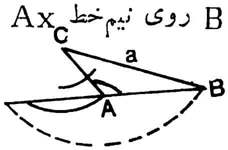
$a<b$ جواب ندارد

$a=b$ جواب ندارد

$a>b$ یك جواب (مثلث ABC)

باید توجه داشت‌که درحالت $a>b$ دایره به‌مرکز C وشعاع a خط Ax را در دونقطه B و B' (قرینه نسبت به نقطه A) قطع می‌کند ولی چون دو مثلث قائم‌الزاویه CAB و CAB' متساویند لذا مسئله فقط یك‌جواب دارد.

حالت سوم $A>90^\circ$ دراین‌حالت نیز بایدرأس B روی نیم‌خط Ax باشد و:



شکل ۱۹ ز

$a<b$ مسئله جواب ندارد

$a=b$ مسئله جواب ندارد

$a>b$ یك‌جواب دارد (مثلث ACB)

یادآوری- درضمن بحث دراین مسئله معلوم‌شدکه ممکن‌است در دومثلث دوضلع نظیر به‌نظیر متساوی باشند و زاویه‌های روبرو به‌یکی ازضلعها درآن دومثلث نیز متساوی باشد ولی دومثلث باهم مساوی‌نباشند اما درصورتیکه $a>b$ باشدهمواره مسئله یك‌جواب

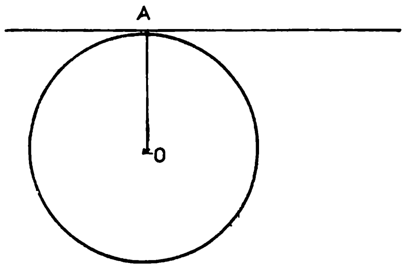
دارد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر در دومثلث دوضلع نظیر به‌نظیر متساوی وزاویه‌های روبرو به‌بزرگترین ضلع آن‌دو نیز در دومثلث متساوی باشند دومثلث متساویند.

۹ـ ترسیم مماس بردایره

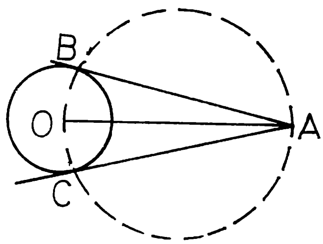
(۱) رسم‌مماس بر دایره‌ازیك‌نقطه‌معلوم.

الف ـ اگر نقطه مغلوم A بر دایره مفروض C به‌مرکز O واقع باشد. برای رسم مماس خطی را که در نقطه A برشعاع OA عموداست رسم می‌کنیم ومسئله همواره فقط یك جواب دارد. (ش ۲۰)



شکل ۲۰

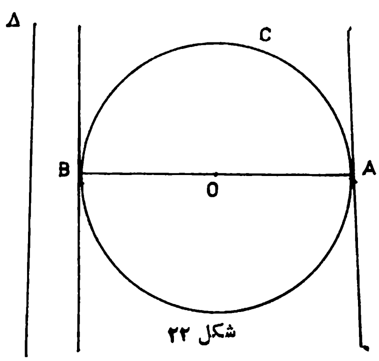
ب ـ اگر نقطه مفروض A خارج از دایره باشد. اگر AB مماس بردایره باشد زاویه‌OBA قائمه‌است ونقطه‌B روی‌دایره‌ای به‌قطر OA واقع‌است. پس برای رسم‌مماس ازنقطه‌A بردایره، A را به O وصل‌کرده و دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم تا دایره مفروض‌را در B و C قطع‌کند AB و AC مماسهای مطلوب می‌باشند. (ش ۲۱)



شکل ۲۱

ج ـ اگر نقطه معلوم A درداخل دایره باشد رسم مماس بردایره امکان ندارد.

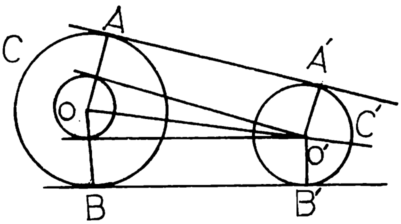
(۲) رسم‌مماس بر دایره به‌موازات یك‌خط مفروض میخواهیم بردایره‌مفروض(C) مماسی موازی با خط مفروض Δ رسم‌کنیم قطری از دایره راکه بر Δ عموداست رسم می‌کنیم واز دوانتهای قطر (ش ۲۲) دوخط بر قطر عمود می‌کنیم این‌دوخط مماسهای مطلوب‌اند ومسئله همواره دو جواب دارد.



شکل ۲۲

۱۰ـ ترسیم مماس مشترك دو دایره

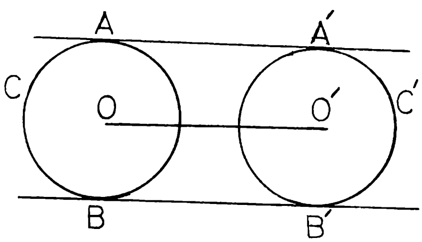
(۱) رسم مماس مشترك خارجی دودایره.



شکل ۲۳ الف

دو دایره (C) و (C') به مـرکزهای O و O' وشعاعهای R و R' مفروض‌اند. اگر AA' مماس مشترك خارجی دودایـره باشد (ش۲۳) وفرض‌کنیم $R'<R$ است ازنقطه O' مـرکز دایره‌کوچکتر خطی مـوازی با AA' رسم‌کنیم‌تاشعاع OA ازدایره‌بزرگتر را درنقطه D قطع‌کند شکل $AA'O'D$ مستطیل است و $AD=A'O'$ است و لـذا $OD=OA-AD$ ویا $OD=R-R'$ وخط $O'D$ بردایره بمرکز O و شعاع OD مماس است ازاین‌بررسی راه ترسیم زیر نتیجه می‌شود (ش۲۳) به‌مرکز دایره بزرگتر و شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم‌می‌کنیم وازنقطه O' مرکز دایره‌کوچکتر مماس $O'D$ را بر این‌دایره رسم‌کرده وسپس نقطه O را بـه‌نقطه D (نقطه تماس) وصل مـی‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره O را درنقطه A قطع‌کند و ازنقطه O' نیم‌خطی عمود بر $O'D$ درجهت نیم‌خط OA رسم می‌کنیم تادایره O' را در A' قطـع‌کند خط AA' مماس مشترك دو دایره است.

شرط امکان‌مسئله آن‌است‌که نقطهٔ O' خارج دایره به‌مرکز O وشعاع $R-R'$واقع باشد یعنی باید $OO'>R-R'$ باشد واین‌شرط وقتی برقراراست‌که دو دایره متخارج یامماس خارج یا متقاطع باشندکه دراین‌صورت دومماس مشترك خارجی AA' وBB' وجود دارد.



شکل ۲۳ ب

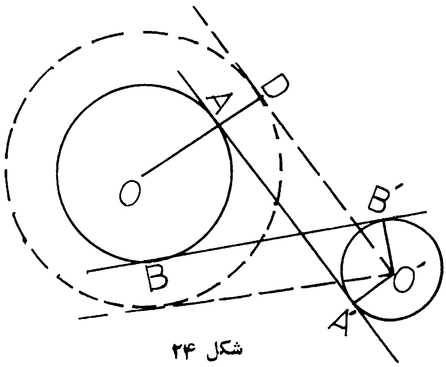
اگر $OO'=R-R'$ باشد دو دایره مماس داخل وفقط یك‌مماس مشترك خـارجی دارند.

تبصره- اگر $R=R'$ باشد مماس‌های مشترك خـارجی با خط‌المرکـزین دو دایره موازیند. (ش ۲۳ ب)

(۲) رسم مماس مشترك داخلی دو دایره:

نظیر توضیحاتی‌که درمورد رسم مماس مشترك خارجی درقسمت قبل داده شده بـا ادامه همان‌روش واستدلال طرز ترسیم مماس مشترك داخلی دودایره به‌طریق زیـرانجام می‌شود.

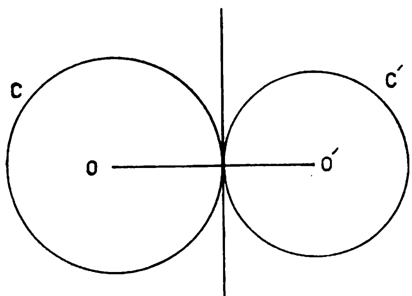
به‌مرکز O (مرکز دایره بزرگتر) و شعاع $R+R'$ دایره رسم می‌کنیم واز نقطه



شکل ۲۴

O' (مرکز دایره کوچکتر) مماس $O'D$ را بر این دایره رسم کرده و سپس نقطه O را به نقطه D (نقطه تماس) وصل می‌کنیم تا دایره H را (ش ۲۴) در نقطه A قطع کند و از نقطه O' نیم‌خطی عمود بر $O'D$ و درخلاف جهت نیم‌خط OA رسم می‌کنیم تا دایره (C') را در A' قطـع کند AA' مماس مشترك داخلـی مطلوب است.

شرط امکان مسئله آن است که نقطه O' درخارج دایره به‌مرکز O وشعاع $R+R'$ واقع باشد یعنی باید $O'O > R+R'$ باشد و این شرط وقتی برقرار است کـه دو دایره متخارج باشند ودراین‌صورت دومماس‌مشترك AA' و BB' وجود دارد.

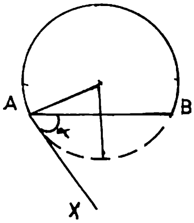


شکل ۲۵

اگر $OO' = R+R'$ باشد دو دایره مماس خارج وفقط يك مماس مشترك داخلی دارند. (ش ۲۵)

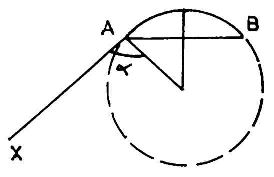
۱۱ـ ترسیم کمان درخور زاویه مفروض α نظیر به پاره‌خط معلوم AB.

ابتداء پاره‌خط AB را رسم کرده وازنقطه A نیم‌خط Ax راطوری رسم می‌کنیم که با نیم‌خط AB زاویه‌ای مساوی بـا α تشکیل دهد از A. (ش ۲۶) عمودی بر این نیم‌خط رسم کرده و نقطه تلاقی این عمود را با عمود منصف پاره‌خط AB تعیین (ش ۲۷ و ۲۶) می‌کنیم نقطه o بدست می‌آید به مرکز o وشعاع oA دایره‌ای رسم می‌کنیم کمان AMB ازاین‌دایره که بانیم خط Ax دريك طرف خط AB واقع نمی‌باشد کمان درخور زاویه α نظیر به وتر AB است.



شکل ۲۶

باید توجه داشت کـه به همین روش ترسیم کمان درخور زاویه α نظیر به‌وتـر AB در طرف دیگرخط AB نیز رسم می‌شود.



شکل ۲۷

اگر زاویه α قائمه بـاشدکمان در خور آن در هـرطرف AB یـك نیمدایـره‌ای است به‌قطر AB.

بخش سوم

حل یك مسئله ترسیمی

در پیشتر مسئله‌های ترسیمی هندسی (ساختمان‌های هندسی) مقصود بدست آوردن شکلی‌است (نقطه، پاره خط، نیم‌خط، زاویه، . . .) کــه دارای شرطهای مفروضی باشد. حل این‌گونه مسئله‌ها شامل سه‌مرحله به‌ترتیب زیر است.

۱ــ رسم شکل (راه ترسیم شکل)

۲ــ اثبات درستی ترسیم

۳ــ بحث درمسئله

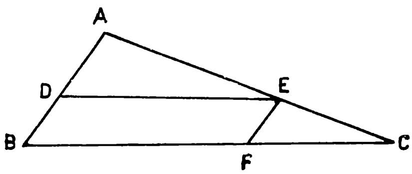
درحل مسئله‌های ترسیمی با استفاده ازتمام معلولهای مسئله معمولا دوشکل رسم می‌شود یکی شامل معلومهای مسئله ودیگری که در آن مسئله حل‌شده فرض می‌شود وشامل ترسیمهای لازم می‌باشد. اگردرشکلی که مسئله حل‌شده،فرض‌می‌شود رابطه بین جزءهای معلوم مشاهده نشود دراینصورت خطهای‌لازم «بدینوسیله معمولا مثلثهایی‌پدید می‌آیدکه با معلومهای مسئله‌مربوط بوده ورسم آنها به‌حالتهای معمولی ترسیم مثلث منجر می‌شود» به‌شکل افزوده می‌شود تا به کمك آنها رابطه‌های ذکرشده آشکارشود. درترسیم‌های‌هندسی‌ازتغییرمکان درصفحه (انتقال‌ـ دوران)، تقارن (مرکزی‌ـمحوری)، تشابه، تجانس وگاه ازچندتبدیل‌توأم باهم، رسم‌شکلهای کمکی، یافتن‌جزء جدید وثابت، (نقطه، خط، زاویه و ...) که موجب راهنمایی درحل‌مسئله می‌شود، استفاده‌می‌شود. درمسئله‌های ترسیمی زیر باتوجه به آنچه درمقدمه راجع به‌مکانهای هندسی وشرطهای مربوط به‌آنها ذکرشد چند مثال آورده می‌شود.[1]

۱- تغییر مکان

الف- انتقال

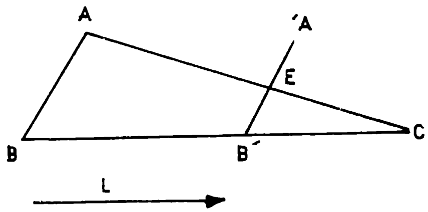
درحل بعضی‌ازمسئله‌های ترسیمی‌هندسی می‌توان ازانتقال استفاده‌کرد.[۲]

مسئله- مثلث ABC داده شده‌است پاره‌خطی به‌طول‌معلوم l چنان رسم‌کنید که‌موازی CB بوده ومتکی‌برد وضلع AB وAC باشد.



شکل ۲۸

حل- اگر مسئله حل شده فرض شود و DE پاره خط مطلوب باشد. (شکل ۲۸) $DE=l$ و$ED||BC$ هرگاه از نقطه E خطی موازی AB رسم کنیم تا BC را در نقطه F قطع‌کند چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است. ودرنتیجه $DE=BF$ است بنابراین راه حل مسئله چنین بدست‌می‌آید. نقطه E محل برخورد AC با$A'B'$ است‌که‌ازضلع AB باانتقال $\overrightarrow{l}$ بدست می‌آید. بنابراین پاره خط AB را به اندازه بردار $\overrightarrow{l}$ منتقل‌می‌کنیم تااز تلاقی این پاره خط جدید $(A'B')$ با AC نقطه E بدست‌آید واز E خطی موازی BC رسم می‌کنیم. (ش ۲۹) درصورتیکه پاره‌خط مطلوب برد وضلع AB وAC متکی‌باشدلازم است $l<BC$ باشد و اگر پاره خط برامتداد AB و AC بتواند متکی باشد (در صورت مسئله باید آورده شود) شرط $l<BC$ لازم نمی‌باشد ومسئله همواره جواب دارد.



شکل ۲۹

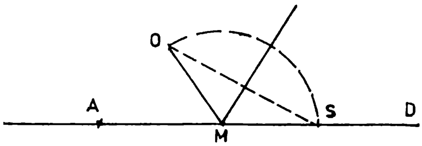
ب- دوران

مسئله- خط D و نقطه A واقع‌بر آن ونقطه O درخارج آن‌مفروض است. روی D نقطه M راچنان پیداکنیدکه مجموع فاصله‌های‌آن‌از A و O برابر بامقدارمعلوم l باشد.

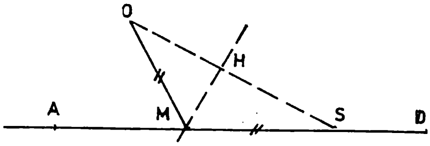
حل- اگر M نقطه مطلوب باشد باید $MA+MO=l$ اگر به‌مرکز M و شعاع MO کمانی رسم کنیم این‌کمان خط D را در نقطه S قطع می‌کند و $AM+MS=l$

۱- در بعضی‌از ترسیم‌های هندسی از انعکاس نیز استفاده می‌شودکه چون این قسمت از برنامه هندسه دوره دبیرستان حذف‌شده است دراین‌کتاب نیامده است.

۲- ازانتقال بیشترهنگامی‌استفاده می‌شودکه دوطول وزاویه بین امتدادهای آنها داده‌شده‌باشد.



شکل ۳۰



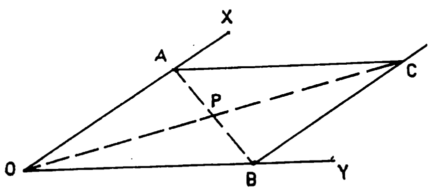
شکل ۳۱

است نقطه M برعمود منصف *SO* قرار دارد (ش ۳۰) از اینجا راه ترسیم زیر بدست می‌آید. از نقطه A واقع برخط D پاره‌خط AS را مساوی با l بر آن نقل می‌کنیم از S به O وصل کرده وعمود منصف SO را می‌کشیم تا خط D را در نقطه M قطع کند، نقطه M نقطه مطلوب است $l = AM + MO$ (ش ۳۱) شرط امکان مسئله آن است که MH خط D را قطع کند یعنی OS عمود بر D نباشد. مسئله فقط يك جواب دارد.

۲- تقارن

الف- تقارن مرکزی[1]

مسئله- از نقطه P واقع در داخل زاویه XOY خطی چنان رسم کنید که OX را در نقطه B قطع کند و $PA = PB$ باشد.



شکل ۳۲

حل- اگر مسئله حل شده فرض شود. و BPA پاره‌خط مطلوب باشد آنگاه $PA = PB$ اگر از O به P وصل کردۀ و پاره‌خط OP را تا نقطه C به اندازه خود امتداد دهیم (تقارن مرکزی) چهار ضلعی ACBO چون قطرها منصف یکدیگرند لذا متوازی الاضلاع است بنا بر این راه ترسیم پاره خط مطلوب چنین بدست می‌آید. (ش ۳۲) نقطه O (راس زاویه) را به P وصل کرده و OP را به‌اندازه خود تا نقطه C امتداد می‌دهیم از C، خطی موازی OY رسم می‌کنیم تا OX را در نقطه A وخطی موازی OX می‌کشیم تا OY را در نقطه B قطع کند APB خط مطلوب است.

ب- تقارن محوری

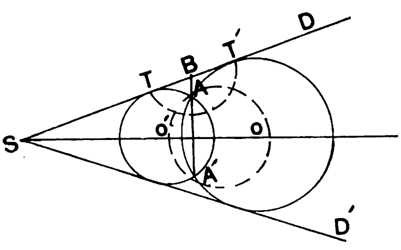
مسئله- دایره‌ای رسم کنید که بر نقطه مفروض A بگذرد و بردو ضلع زاویه DSD' مماس باشد.

حل- مرکز دایره مطلوب بر نیمساز زاویه DSD' واقع است. دایره مطلوب بر A'

۱- تقارن را می‌توان يك دوران $180°$ درحول نقطه مرکز تقارن دانست،

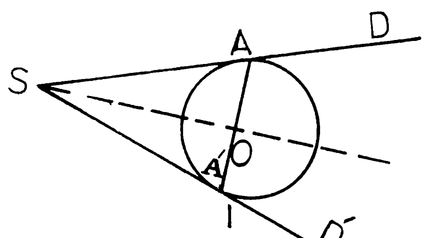
قرینه A نسبت به این نیمساز نیز می‌گذرد (استفاده از تقارن محوری) بنا بر این حل مسئله منجر به این می‌شود که دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطه معیین بگذرد و بر دو ضلع زاویه مماس باشد.

اگر مسئله حل شده فرض شود و (O) دایره مطلوب باشد. AA' خط (ش ۳۳) D در نقطه B قطع می‌کند BT مماس بر دایره می‌باشد و لذا؛



شکل ۳۳

$BT^2 = BA \cdot BA'$ بنا بر این راه حل زیر بدست می‌آید. ابتداء A' قرینه نقطه A را نسبت به نیمساز زاویه پیدا کرده و AA' را امتداد میدهیم تا خط D را در نقطه B قطع کند بر AA' دایره دلخواهی می‌گذرانیم و از نقطه B مماس BP (P نقطه تماس) را بر دایره رسم می‌کنیم به‌مرکز B و شعاع BP کمانی رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه‌های T و T' قطع کنـد دایره‌ای که بر سه نقطه T و A' و A و یا بر سه نقطه T' و A' و A بگذرد جواب مسئله است (این دایره در نقطهٔ T و یا نقطه T' بر D مماس می‌باشد چون رابطهٔ $BT'^2 = BA \cdot BA'$ برقرار است) شرط امکان مسئه آن است که دایره مرور کنند بر A' و A برخط‌های D و D' مماس باشد و برای این‌منظور لازم است A در داخل زاویه DSD' واقع شود.

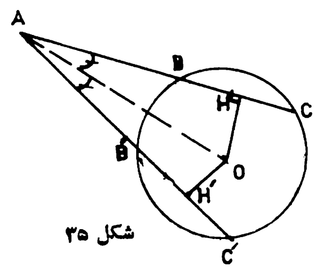


شکل ۳۴

اگر A داخل زاویه DSD' باشد مسئله دو جواب دارد. اگر A بر D یا D' واقع باشد، A و B، T برهم منطبق شده و A همان نقطه تماس وروش ترسیم ساده‌تر ومسئله یك جواب دارد. اگـر A خارج DSD' بـاشد مسئله جواب ندارد. (ش ۳۴)

استفاده ازتقارن در تعیین تعداد جواب‌ها

مسئله- ازنقطه مفروض A واقع درخارج دایرهٔ (O) قاطعی چنان رسم کنید که وتری به‌طول معلوم l دردایره جدا کند.



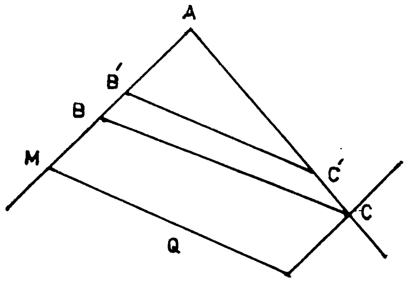
شکل ۳۵

حل- اگرمسئله حل شده و $BC = l$ وتر مطلوب باشد ملاحظه می‌شود که مسئله جواب دیگری هم دارد که قرینه BC نسبت به محور تقارن AO می‌باشد بنا براین توجه به تقارن (تقارن محوری نسبت به محور تقارن AO)

کمك به وجود جواب دیگر مسئله می کند یعنی همواره مسئله دوجواب دارد. (ش۳۵) شرط جواب مسئله آن است که $2R > l$ باشد که دراین صورت دوجواب برای مسئله وجود دارد اگر $2R = l$ باشد قطری ازدایره که بر نقطه A می گذرد جواب مسئله است دراین صورت مسئله تنها یك جواب دارد
اگر $2R < l$ باشد جواب ندارد. راه حل (ترسیم) این مسئله درمسئله شماره ۲۳۴ آمده است.

۳ــ تشابه

مسئله- مثلث ABC راکه ازآن ضلع $BC = a$ و زاویه A و نسبت اندازه‌های دو ضلع $k = \frac{b}{c}$ معلوم است رسم کنید.



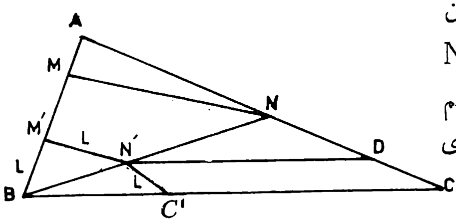
شکل ۳۶

حل- زاویه A را رسم می کنیم و روی ضلعهای آن طولهای AB' و AC' را به ترتیب متناسب با یك و K انتخاب می کنیم مسئله به این منجر می شود که قطعه خط $BC = a$ را موازی با $B'C'$ ومتکی بردوضلع AB' و AC' رسم کنیم که برای این منظور از نقطه دلخواه M واقع بر AB' خطی موازی $B'C'$ رسم کرده و برروی آن ازنقطه M طول $MN = a$ را نقل می کنیم از N پاره‌خطی موازی با AB' می کشیم تا AC' را درنقطه C قطع کند از C خطی موازی با MN رسم می کنیم تا AB' را درنقطهٔ B قطع کند ABC مثلث مطلوب است (ش ۳۶)

۴ــ تجانس

مسئله- مثلث ABC داده‌شده‌است نقطه‌های M و N را به ترتیب روی ضلعهای AB و AC چنان بگیرید که $BM = MN = NC$ باشد.

حل- اگر مسئله حل شده فرض شود و M و N نقطه‌های مطلوب باشند، (ش ۳۷) ملاحظه می شود که اگر از نقطه B طول معیین $BM' = l$ رابر AB نقل کنیم و B را به N وصل کرده واز M' خطی موازی MN رسم کنیم تا BN را در N' قطع کند با توجه به تساوی $BM = MN$ نتیجه می شود که $BM' = M'N' = l$ است. اگر ازنقطه N'،



شکل ۳۷

۱ــ اگر $K = -1$ باشد تجانس به تقارن مرکزی تبدیل می شود.

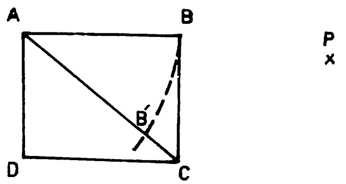
خط $N'C'$ را موازی NC رسم کنیم، $N'C'$ نیز مساوی با l خواهد بود، از N خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه D قطع کند چهارضلعی $N'DCC'$ متوازی‌الاضلاع و $DC = l$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود که با تعیین نقطه N'، نقطه N تعیین خواهدشد بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید.

قطعه‌خط CD را از رأس C بر امتداد CA نقل می‌کنیم، از D خطی موازی BC می‌کشیم، قطعه خط $BM' = l$ را از نقطه B بر امتداد BA نقل می‌کنیم به‌مرکز M' وشعاع l کمانی رسم می‌کنم تا خط رسم شده به‌موازات BC را در نقطه N' قطع کند، از B به N' وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا AC را درنقطه N قطع کند. از N خطی موازی امتداد $M'N'$ رسم می‌کنیم تا AB رادرنقطه M قطع کند، MوN نقطه‌های مطلوب‌مسئله‌اند. زیرا چهارضلعی $BMNC$ مجانس چهارضلعی $BM'N'C'$ در تجانس به‌مرکز B ونسبت تجانس $K = \frac{BN}{BN'}$ می‌باشد و چون در چهـارضلعی $BM'N'C'$ سه‌ضلع $BM' = M'N' = N'C' = l$ می‌باشد، لذا سه‌ضلع چهارضلعی $BMNC$ نیز باهم مساویند: $BM = MN = NC$

۵- چند تبدیل توأم

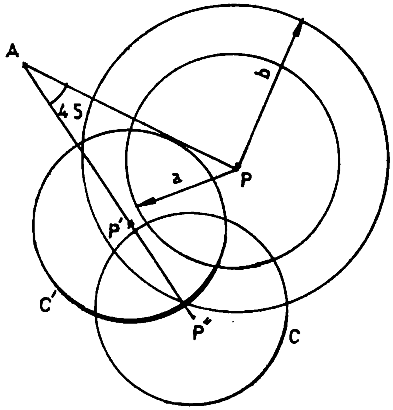
مسئله- دونقطه A و P داده شده‌است. از رأس A مربع $ABCD$ را چنان رسم کنید که فاصله‌های رأسهای CوB از نقطه P به‌اندازه‌های معلوم a و b باشد.

حل- اگر $ABCD$ مربع مطلوب باشد.

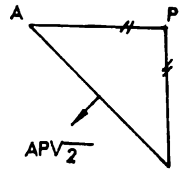


شکل ۳۸

یك‌مکان C دایره‌ای به مرکز P و به شعاع b است. مکان B دایره‌ای به‌مرکز P و به‌شعاع a می‌باشد (ش ۳۸). اگر B بدزاویه $45°$ و به مرکز A دوران کند تا به‌وضع B' درآید، در تجانس به‌مرکز A و نسبت $\sqrt{2}$ رأس C مجانس B' می‌باشد. بنابراین مکان‌دیگر C به‌این ترتیب بدست می‌آید که مکان B را ابتداء $45°$ به‌مرکز A دوران‌دهیم ومجانس وضع‌جدید آن را درتجانس به‌مرکز A ونسبت $K = \sqrt{2}$ رسم می‌کنیم (ش ۳۹) محل برخورد دو دایره یکی‌به‌مرکز P وشعاع b و دیگری مجانس دایره به‌مرکز P' و شعاع a (دایره به‌مرکز P' و شعاع a دوران یافته‌دایره به‌مرکز P با زاویه $45°$ درحول نقطه A می‌باشد)(ش ۴۰) بامرکز تجانس A و نسبت تجانس $K = \sqrt{2}$، نقطه C می‌باشد باتعیین C مربع مشخص می‌شود. شرط امکان مسئله آن‌است که دایره (P, b) با دایره $(P''a)$ متقاطع ویا مماس باشد. مسئله ممکن است دو جواب یا یك جواب داشته باشد. یا دارای جواب نباشد.



شکل ۴۰

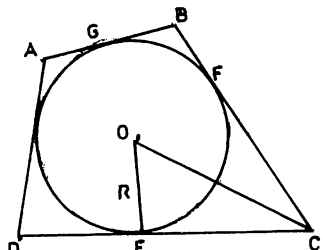


شکل ۳۹

۶- استفاده ازشکلهای اضافی و کمک کننده به ترسیم شکل مطلوب

دربعضی ازمسئله‌های ترسیمی اضافه کردن پاره‌خطها وتشکیل شکل جدیدی می‌توانـد کمک مؤثری درراهنمای برای حل مسئله موردنظر باشد. بایدتوجه‌داشت که شکل اضافی باشرطهای مفروض مسئله قابل‌رسم باشد دراین‌مورد باید پاره‌خطها، زاویه‌ها ویا قسمت‌هایی ازشکل را پیداکرد که بتوان آنها را به‌کمک داده‌های مسئلهٔ رسم کرد و به‌ویژه از رسم مثلث‌هائی که با معلوم‌های مسئله قابل‌رسم باشند استفاده کرد.

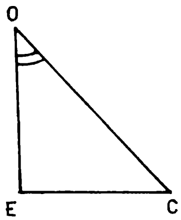
مسئله- چهارضلعی محیط بردایره معلومی رسم کنید درصورتیکه دوضلع متوالی AB و BC وزاویه BCD ازآن معلوم باشد.



شکل ۴۱

حل- اگرمسئله حـل شده فرض شود و ABCD چهارضلعی مطلوب باشد. (ش ۴۱) مثلث قائم الزاویه OEC را با معلوم بودن $OE=R$ و $O\hat{C}E=\frac{B\hat{C}D}{۲}$ می‌توان رسم کرد به این ترتیب رأس C مشخص می‌شود و بنا براین راه ترسیم زیر بدست می‌آید.

ابتداء مثلث قائم الزاویه OEC را باداشتن $OE=R$ و $O\hat{C}E=\frac{B\hat{C}D}{۲}$ رسم می‌کنیم. (ش ۴۲) ازنقطه C مماس CF را بردایره (O) رسم کرده واندازه‌ضلع BC را ازنقطه C درجهت CF برروی آن نقل می‌کنیم رأس B بدست می‌آید از B مماس BG را بردایره



شکل ۴۲

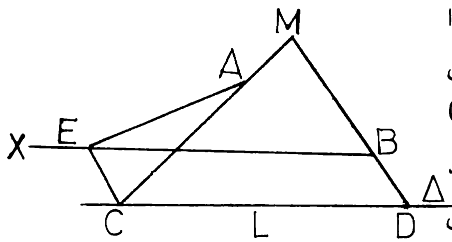
رسم کرده و بر روی آن از نقطه B و در جهت BG، AB را جدا می‌کنیم از A مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد مماس CE را در نقطه D قطع کند ABCD چهارضلعی مطلوب است.

$$E\hat{O}C = ۹۰^\circ - \frac{B\hat{C}D}{۲}$$

۷- یافتن جزء جدید ثابت

مسئله- دو نقطه A و B وخط Δ داده‌شده‌است. نقطه‌ای مانند M چنان بیابید که زاویه AMB مقدار معیینی بوده واز تقاطع MA و MB باخط Δ قطعه خطی به‌طول معیین $CD = l$ پدید آید.

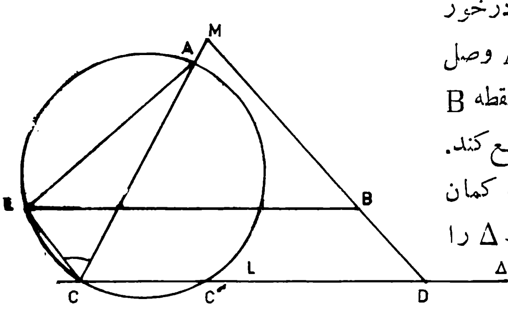
حل- اگر مسئله حل‌شده فرض‌شود و M نقطه‌مطلوب باشد هرگاه از B خط BX موازی Δ را رسم کرده (ش ۴۳) و پاره‌خط BE را بر روی‌آن به‌اندازه CD جداکنیم چهارضلعی EBDC متوازی‌الاضلاع است و $CE = DB$ می‌باشد و دو زاویه $\hat{M}$ و $\hat{C}_۱$ با هم برابرند ونقطه C محل برخورد خط Δ با مکان هندسی نقطه‌هائی‌است که از آنها پاره‌خط AE به‌زاویه معیین (زاویه $A\hat{M}B$) دیده شود بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید.



شکل ۴۳

از نقطه B خطی‌موازی با Δ رسم کرده واز نقطه B پاره‌خط BE رامساوی‌با l جدامی‌کنیم. از نقطه A به E وصل کرده وکمان‌درخور زاویه‌معیین (زاویه AMB) را نظیر به وتر AE رسم می‌کنیم محل برخورد این کمان درخور باخط Δ نقطه C را می‌دهد از C به A وصل کرده وامتداد می‌دهیم تا خطی‌راکه ازنقطه B موازی EC رسم می‌شود درنقطه M قطع کند. (ش ۴۴) شرط امکان مسئله آن است‌که کمان درخور زاویه C نظیر به‌وتر AE، خط Δ را قطع کند یا بر آن مماس باشد.

اگر کمان درخور، خط Δ را در دو نقطه C و C' قطع کند مسئله دو جواب دارد.



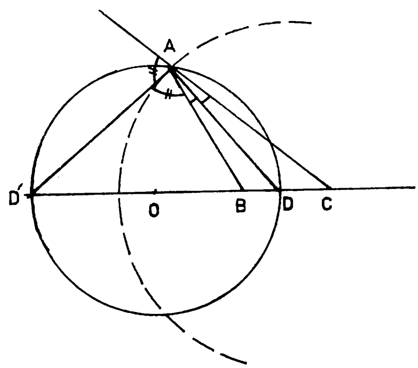
شکل ۴۴

یادآوری- در استفاده از همه‌معلومهای مسئله باید روشی‌را انتخاب کرد که هرچه‌ممکن باشد جزءهای ثابت‌بیشتری بدست بیاید درحل این مسئله یك نقطه جدید وثابت E و یك زاویه جدید $C(\widehat{ACE})$ بدست‌آمد که رأس‌آن روی‌خط مفروض Δ قرارداشت. درحل این مسئله عوض کردن جای‌نقطه‌های A و B فرق‌نمی کند یعنی‌می‌توان ازنقطه A پاره‌خطی‌موازی ومساوی با CD رسم‌کرد تانقطه ثابتی مانند E' بدست آید و ازروی آن‌نقطه D و سپس نقطه M را تعیین کرد.

۸- استفاده‌از دوشرط دروجود دومکان هندسی وتعیین فصل مشترك آنها

مسئله- ازمثلثی یك ضلع ونقطه تقاطع نیمسار رأس مقابل این‌ضلع با آن وطول این نیمساز دردست است مثلث‌رارسم کنند.

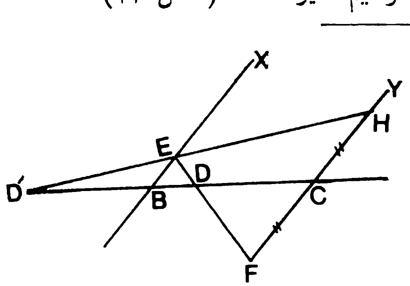
حل- معلومهای مسئله عبارتنداز $BC=a$، و محل نقطه D (برخورد نیمساز باضلع) و $AD=d$ طول نیمساز. با رسم پاره‌خطی به‌طول$BC=a$ دو رأس B وC مشخص شده وباید رأس A را بااستفاده ازمعلومهای داده شده بدست‌آورد اگرABCمثلث مطلوب باشد (ش ۴۵) نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A ضلع BC را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند یعنی:



شکل ۴۵

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$$

وبنابراین D وD' مزدوجهای توافقی B و C بانسبت $\frac{AB}{AC}$ می‌باشنـد امـا چون سه نقطه D,C,B داده شده‌اند تعیین نقطه D' به‌طریق ترسیم مسیراست[1]. (شکل ۴۶)



شکل ۴۶

۱ــ وقتی سه نقطه D و C و B برروی یك خط داده شده ومنظورتعیین نقطه چهارم باشدکه در رابطه

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}$$

صدق کند، از دو نقطه BوC دو خط Bx و Cy را موازی‌رسم کرده وازنقطه D خطی‌رسم‌می کنیم که Bx و Cy راقطع کند (E و F محل‌تلاقی خط

بنابراین محل نقطه D' بر امتداد BC مشخص می‌شود و چون نیمسازهای داخلی و خارجی هرزاویه برهم‌عمودند لذا می‌توان نتیجه گرفت که:

۱ــ نقطه A نقطه‌ای ازمکان هندسی نقطه‌هایی است که قطعه خط DD' به زاویه قائمه از آن نقطه‌ها دیده می‌شود (شرط P)

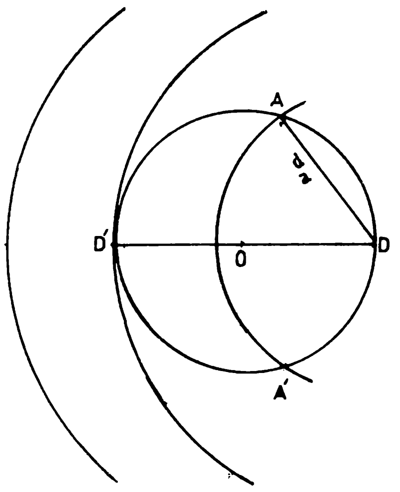
۲ــ نقطه A نقطه‌ای ازمکان هندسی نقطه‌هایی است که از نقطه ثابت D به فاصله $AD=d$ می‌باشند (شرط Q) بنابراین نقطه A باید دارای هردوشرط باشد ولذا محل تلاقی این دو مکان است.

اما مکان اول دایره‌ای است به قطر DD' و مکان دوم دایره‌ای است به مرکز D و شعاع $AD=d$ ومحل تلاقی این‌دودایره نقطه A رانشان می‌دهد (شکل ۴۷)

بحثــ شرط وجود نقطه A آن‌است که دودایره مذکور متقاطع باشند لذ باید:

$$|R-R'|<OD<R+R'$$

باتوجه به‌آنکه نقطه D مرکز دایره (d و D) برمحیط دایره به قطر $D'D$ واقع است لذا دودایره مذکور متقاطع یامماس داخل ویا متداخل‌اند اما



شکل ۴۷

$$R=\frac{DD'}{۲}=OD$$

و $R'=AD=d_a$ بنابراین:

$$|R-d|<OD=R<R+d$$

بررسی نامساویهای بالا:

$$OD=R<R+d \quad (۱)$$

$$|R-d|<OD=R$$

حال اگر $R>d$ باشدیعنی $R-d>$ باشد رابطه

$$R-d<OD=R$$

همواره درست است واگر $R<d$ باشدیعنی $R-d<0$ لذا: $|R-d|=d-R$ و

رسم شده با Bx و Cy است) به اندازه CF برCy جدا می‌کنیم تا CH بدست آید تلاقی HE و BC نقطه مطلوب D' را می‌دهد زیرا:

$$\frac{BE}{CF}=\frac{BD}{DC} \quad و \quad \frac{BE}{CH}=\frac{D'B}{D'C}$$

اما $CH=CF$ است ولذا $\frac{BD}{DC}=\frac{D'B}{D'C}$ است.

$$d-R<OD=R\Longrightarrow d<2R$$

باید $AD<DD'$ باشد.

تعداد جوابها- اگر دایره به مرکز D و شعاع $AD=d$ دایره به قطر $D'D$ را قطع کند همواره در دو نقطه قرینه نسبت به خط المرکزین دو دایره، قطع می کند بنابراین A' قرینه نقطه A نسبت به محور تقارن $D'D$ می باشد و چون دو مثلث ABC و $A'BC$ از لحاظ جزءها (ضلعها و زاویه‌ها) با یکدیگر مساویند لذا مسئله فقط یک جواب دارد.

اگر $OD=d-R$ یعنی $2R=d$ باشد دو دایره در نقطه D' مماس اند و مسئله جواب ندارد.

اگر $d>2R$ یعنی $AD>D'D$ باشد دو دایره متداخل اند و مسئله جواب ندارد.

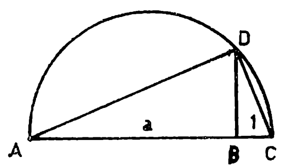
بخش چهارم

کاربرد ترسیم‌های هندسی

حل هندسی مسئله‌های جبری (نمایش هندسی مقدارهای جبری)

مسئله ۱- بامعلوم بودن طول a طول $x=\sqrt{a^3}$ را رسم کنید.

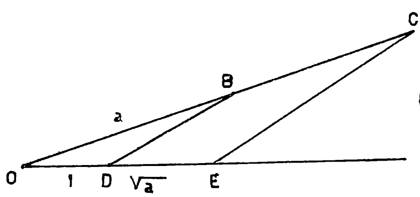
حل- می‌توان $x=\sqrt{a^3}$ را به‌صورت $x\times 1=a\times\sqrt{a}$ نوشت که با ترسیم $\sqrt{a}$ ازروی a، سپس با تعیین چهارمین جزء تناسب باداشتن سه‌جزء معلوم آن پاره‌خط x رابدست آورد. تعیین $\sqrt{a}$ ازروی مقدارمعلوم a:



شکل ۴۸

$$\overset{\Delta}{ADC}:\ BD^2=AB\cdot BC$$

$$BD^2=a\times 1\Longrightarrow BD=\sqrt{a}$$



شکل ۴۹

$$CE\|BD\quad \frac{a}{1}=\frac{BC}{\sqrt{a}}\Longrightarrow BC\times 1=a\sqrt{a}$$

بنابراین $BC=x$ است (ش ۴۹)

مسئله ۲- پاره‌خط $AB=a$ داده شده برروی این پاره‌خط نقطه‌ای مانند P چنان بیابید که $AP^2=AB\times PB$ باشد.[1]

حل- نقطه P پاره‌خط AB را به دو جزء AP و PB تقسیم می‌کند (ش ۵۰) اگر

---

۱ ــ این‌مسئله زیرعنوان تقسیم یك پاره‌خط به‌نسبت ذات وسط وطرفین آمده است.

تعریف- تقسیم یك قطعه‌خط به‌نسبت ذات وسط وطرفین یعنی تقسیم آن به‌دوجزء بطوریکه یکی ازآنها واسطه‌هندسی بین‌خود قطعه خط وجزء دیگر باشد.

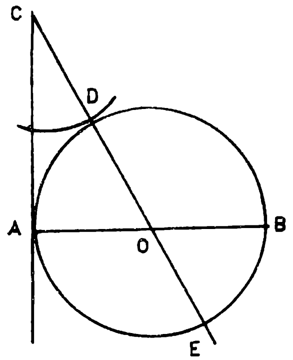
AP را x بگیریم در این صورت $x<a$ و $PB=x-a$ و رابطه $AP^2=AB\times PB$ به‌صورت زیر درمی‌آید

شکل ۵۰

$$x^2=a(a-x)\Longrightarrow x^2+ax=a^2\Longrightarrow x(a+x)=a^2$$

ازرابطه اخیر معلوم می‌شود که پاره‌خطهای به‌طول $a+x$ و x تفاضلشان a وواسطه‌هندسی آنها نیز a می‌باشد بنابراین‌مسئله منجر به‌تعیین دوپاره‌خط می‌شود که تفاضل وواسطه‌هندسی آنها معلوم‌باشد. برای‌این منظور:

دایره‌ای به‌قطر $AB=a$ (تفاضل دو پاره‌خط $a+x$ و x) رسم کرده از نقطه A مماسی بر دایره می‌کشیم و روی آن پاره‌خط $AC=a$ (واسطه هندسی دو پاره‌خط $a+x$ و x) را رسم می‌کنیم C را به O وصل کرده (O مرکز دایره) وامتداد می‌دهیم تادایره رادر نقطه‌های D و E قطع کند CD و CE (ش ۵۱) دو پاره‌خط x و $a+x$ می‌باشند زیرا:



شکل ۵۱

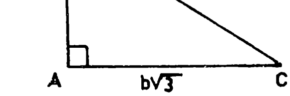
$$CE-CD=DE=a$$
$$CD\cdot CE=AC^2=a^2$$

بنابراین CD برابر AP پاره‌خط مطلوب خواهدبود ومی‌توان آنرا برروی AC نقل کرد

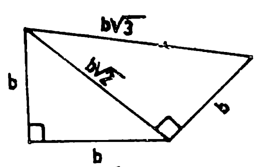
مسئله ۳- a و b دوطول معلوم‌می‌باشدطول x راچنان بیابیدکه $x=\sqrt{2a^2+3b^2}$ باشد

حل- کافی‌است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول‌ضلعهای زاویه قائمه آن $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{3}$ باشد. ابتداء $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{3}$ را رسم می‌کنیم: (شکلهای ۵۲ و ۵۳)

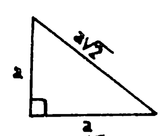
$$BC^2=AB^2+AC^2\Longrightarrow BC^2=2a^2+3b^2\Longrightarrow BC=\sqrt{2a^2+3b^2}\quad (\text{ش}\ ۵۴)$$
$$BC=x$$



شکل ۵۴



شکل ۵۳



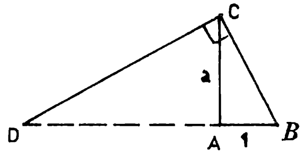
شکل ۵۲

مسئله ۴- a و b دوطول معلوم می‌باشند مطلوب است رسم طول:

$$x=\sqrt[4]{a^4+b^2}$$

حل- مـی‌توان نوشت $(x^2)^2=(a^2)^2+(b)^2$ یعنی x^2 اندازهٔ وتـر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول یك ضلع آن a^2 وطول ضلع دیگرش b می‌باشد.

ابتداء بامعلوم بودن اندازه پاره‌خط a، پاره‌خطی به طول a^2 را رسم می‌کنیم برای این منظور مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یك ضلع زاویه قائم آن a و ضلع دیگرش یـك باشد (ش ۵۵) از نقطه C عمودی برضلع BC اخراج



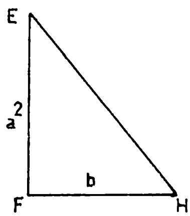
شکل ۵۵

می‌کنیم تاامتداد AB را درنقطه D قطع کند درمثلث قائم‌الزاویه BCD می‌توان نوشت:

$$CA^2=DA.AB \Longrightarrow a^2=DA\times 1 \Longrightarrow DA=a^2$$

حال مثلث قائم‌الزاویه به‌ضلعهای a^2 و b رارسم می‌کنیم (ش ۵۶) دراین مثلث:

$$EH^2=EF^2+FH^2 \Longrightarrow EH^2=(a^2)^2+b^2 \Longrightarrow EH^2=(x^2)^2 \Longrightarrow EH=x^2$$



شکل ۵۶

با داشتن پاره‌خط $EH=x^2$ مانند قسمت اول از روی x^2، پاره‌خط به‌طول x را رسم‌می‌کنیم.

ترسیمهای‌ازاین‌گونه رانمایش هندسی‌مقدارهای جبری‌گویند واین مسئله‌ها کاربردترسیمهای هندسی را برای مقدارهای جبری نشان می‌دهد.

۲- حل هندسی معادله‌ها

معادله $f(x)=0$ (۱) داده‌شده‌است اگر بتوان‌دومعادله $g(x,y)=0$ (۲) و $h(x,y)=0$ (۳) را چنان تشکیل داد که از حذف y بین آنها معادله(۱) بدست آید، معادله‌های (۲)و(۳) درصفحه محورهای مختصات منحنی‌های C و C' را مشخص‌می‌کنند. ازحذف y بین‌معادله‌های (۲)و(۳) معادله‌ای بدست‌می‌آیدکه ریشه‌های‌آن طولهای نقطه‌های تلاقی دومنحنی C و C' می‌باشد. بنابراین ریشه‌های معادله (۱) عبارتند از طولهای نقطه‌های تلاقی دومنحنی C و C' وازاین راه می‌توان معادله جبری را از راه هندسی حل کرد.

مثال ۱ معادله درجه‌دوم $f(x)=x^2+px+q=0$ داده شده‌است ریشه‌های‌آن را به‌طریق ترسیم بیابید.

$$f(x)=x^2+Px+q=0 \qquad (1)$$

$$y=x^2 \ \text{یا}\ y-x^2=0 \qquad g(x,y)=0 \qquad (2)$$

$$y=-Px-q \ \text{یا}\ y+Px+q=0 \qquad h(x,y)=0 \qquad (3)$$

ازحذف y بین معادله‌های (۲) و (۳) معادله (۱) بدست می‌آید.
معادله (۲) یک سهمی را نشان می‌دهد که ازمبداء مختصات می‌گذرد «نقطه می‌نیمم سهمی بر مبداء مختصات قراردارد» معادله (۳) یک خط راست رامشخص می‌کند. بنابراین حل معادله درجه دوم (۱) به‌تعیین نقطه‌های تلاقی یک سهمی و یک خط راست منجر می‌شود.

تبصره- می‌توان برای حل معادله (۱) از معادله $y=x^2+px=0$ و $y=-q$ استفاده کرد که دراین‌صورت $g(x,y)=y-x^2-px=0$ و $h(x,y)=y+q=0$ می‌باشد وحل معادله درجه دوم به‌تعیین نقطه‌های تلاقی سهمی $y-x^2-px=0$ با خط راست وموازی بامحور xها به‌معادله $y+q=0$ منجرمی‌شود

مثال ۲- حل‌معادله درجه چهارم $aX^4+bX^3+cX^2+dX+c=0$ به‌وسیله ترسیم.

ابتـداء $X=x-\frac{b}{4a}$ قرارداده وبا این تبدیل معادله به‌صورت:

$$f(x)=x^4+px^2+qx+r=0 \qquad (1)$$

درمی‌آید که می‌توان منحنی (C) وخط D به‌معادله زیررا ازآن تشکیل داد.

$$y=x^4+px^2 \qquad (2) \quad \text{و} \quad y=-qx-r$$

طولهای نقاط تلاقی‌این منحنی وخط، ریشهٔهای معادله (۱) می‌باشد.

تبصره- برای حل‌معادله $x^4+px^2+qx+r=0$ (۱) می‌توان از دومعادله:

$$y=x^2 \quad \text{و} \quad y^2+py+qx+r=0$$

استفاده‌کرد و از روی تعداد نقطه‌هـای تلاقی آنها ریشه‌های معادله (۱) را بدست آورد و همچنین می‌توان از معادله‌های:

$$y=x^2\ ,\ y^2+py+x^2-x^2+qx+r=0$$

و یا

$$y=x^2 \quad \text{و} \quad y^2+py+x^2-y+qx+r=0$$

و یا

$$y=x^2 \quad \text{و} \quad x^2+y^2+(p-1)y+qx+r=0$$

استفاده‌کرد که معادله منجربه رسم یک سهمی ویک‌دایره وتعیین نقطه‌های تلاقی‌آنها می‌شود.

مثال ۳- جوابهای معادله $\frac{x}{2}=\sin x$ راکه درآن $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ است به وسیله ترسیم بدست آورید:

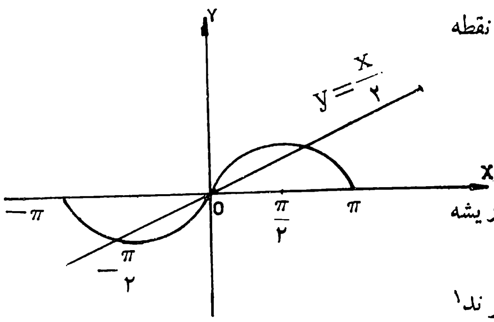
$$\frac{x}{2}-\sin x=0 \qquad (1)$$

$$y = \frac{x}{۲} \qquad (۲)$$

$$y = \sin x \qquad (۳)$$

بنابراین تعیین جوابهای معادله $\frac{x}{۲} = \sin x$ منجر به‌رسم منحنی مثلثاتی $y = \sin x$ و خط راست $y = \frac{x}{۲}$ درفاصله $+\pi$ و $-\pi$ می‌شود.

ملاحظه می‌شود که خط $y = \frac{x}{۲}$ با منحنی $y = \sin x$ درفاصله $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ سه نقطه تلاقی دارد.



شکل ۵۷

ازاین ترسیم نتیجهٔ می‌شودکه:

۱ـ معادله دارای سه‌ریشه‌است

۲ـ یك ریشه صفر، یك ریشه مثبت، یك ریشه منفی است

۳ـ دوریشه‌مثبت‌ومنفی معادله قرینه‌یکدیگرند[1] (ش ۵۷)

۳ـ حل هندسی دستگاه معادله‌ها و نامعادله‌ها

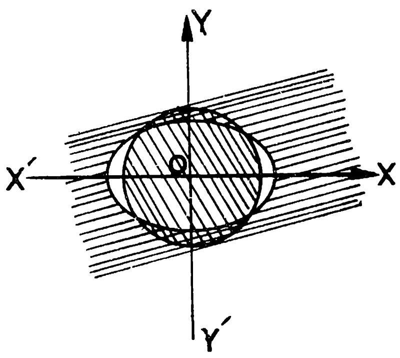
آنچه درقبل ذکرشد می‌تواند بیانگر حل هندسی دستگاه معادله‌ها باشد (رسم هریك از دو منحنی معادله‌های $g(x,y) = ۰$ و $h(x,y) = ۰$ درصفحه محورهای مختصات وتعیین نقطه‌های تلاقی آنها) وبنابراین به‌ذکر دومثال درمورد نامعادله‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱ـ دستگاه نامعادله‌های زیر را به‌روش هندسی حل کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - \frac{۲۵}{۴} > ۰ \\ ۴x^۲ + ۹y^۲ - ۳۶ < ۰ \end{cases}$$

حل‌ـ نمایش هندسی معادله $x^۲ + y^۲ - \frac{۲۵}{۴} = ۰$ دایره‌ای است به‌مرکز مبداء

۱ـ مرکز تقارن منحنی $y = \sin x$ مبداء مختصات می‌باشد و خط $y = \frac{x}{۲}$ از مبداء مختصات می‌گذرد ولذا منحنی را در دونقطه قرینه نسبت به‌مبداء قطع می‌کند.



شکل ۵۸

مختصات و شعاع $\frac{5}{2}$ که مختصات نقطه‌های داخل دایره در معادله اول دستگاه صدق نمی‌کند.[1] (ش ۵۸)

نمایش هندسی معادله $4x^4+9y^2-36=0$ بیضی است به مرکز مبداء مختصات و قطر بزرگتر به طول ۶ و قطر کوچکتر به طول ۴ و ناحیه خارجی آن جواب نمی‌باشد. ناحیه جواب دستگاه دو ناحیه‌ای از شکل است که هاشور ندارد.

مثال ۲- هرگاه b و a مختصات نقطه در دستگاه مختصات قائم باشد برحسب جای‌های مختلف نقطه در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم:

$$(1)\ Z^2-2(a+1)Z+b=0$$ بحث کنید.

حل- برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله بالا باید Δ و حاصلضرب و حاصل جمع ریشه‌ها را تشکیل داد و علامت آنها را تعیین کرد.

$$\Delta=(a+1)^2-b \Longrightarrow \Delta=(x+1)^2-y,$$

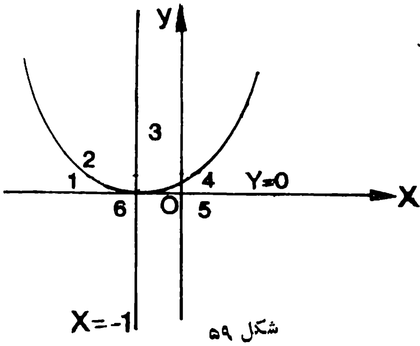
۱ـ دایره یا بیضی رسم شده هرکدام صفحه محورهای مختصات را به دو ناحیه، یکی داخلی و دیگری خارجی تقسیم می‌کنند، مختصات یکی از دو ناحیه جواب نامعادله می‌باشد برای این منظور کافی است یکی از نقطه‌های واقع در یکی از دوناحیه را در نامعادله مربوط قرار داد و از روی علامت مقدار حاصل تعیین کرد که این نقطه جزو منطقه جواب است یا نه مثلا اگر مختصات نقطه O مبداء مختصات را که در داخل دایره است در نامعادله مربوط قرار دهیم نتیجه می‌شود $\frac{-25}{4}$ که این مقدار کوچکتر ازصفر است لذا معلوم می‌شود که مختصات نقطه‌های ناحیه شامل نقطه O یعنی ناحیه داخلی دایره در نامعادله صدق نمی‌کنند، از این لحاظ نقطه‌هایی جواب نامعادله $x^2+y^2-\frac{25}{4}>0$ می‌باشند که بیرون دایره قراردارند به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر مختصات نقطه O را در نامعادله دوم دستگاه قراردهیم حاصل ۳۶− می‌باشد $-36<0$ است لذا معلوم می‌شود که نقطه‌های داخل بیضی جواب نامعادله $4x^2+9y^2-36<0$ است و نقطه‌های خارجی بیضی جواب آن نمی‌باشد اگر ناحیه‌هایی که جواب هریك از نامعادله نمی‌باشند با هاشور مشخص کنیم درون دایره و بیرون بیضی هاشورزده می‌شود ولذا مختصات دومنطقه واقع در دوطرف راست و چپ بین دایره و بیضی جواب دستگاه نامعادله‌ها است.

$$\Delta = 0 \Longrightarrow (x+1)^2 = y$$

نمودار هندسی $y=(x+1)^2$ سهمی است که خط $x=-1$ محور تقارن آن می‌باشد.

$x=-1 \qquad 2(x+1)=0 \qquad S=2(a+1)=$ حاصل جمع ریشه‌ها

$y=0 \qquad P=b=$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها



شکل ۵۹

نمودارهندسی $x+1=0$ خطی‌موازی محور yها و به فاصله ۱ در طرف چپ آن است. نمودارهندسی $y=0$، محور $x'ox$ می‌باشد. از تقاطع سه نمودار شش ناحیه مطابق شکل تشکیل می‌شود. (ش ۵۹)
جدول زیـر را بـرای تعیین علامت تشکیل می‌دهیم.[1]

ناحیه‌ها ←	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\Delta=(x+1)^2-y$	+	−	−	+	+	+
$S=2(x+1)$	−	−	+	+	+	−
$P=y$	+	+	+	+	−	−
نتیجه	$z''<z'<0$			$0<z''<z'$	$z''<0<z'$	$z''<0<z'$
					$\lvert z''\rvert<\lvert z'\rvert$	$\lvert z''\rvert>\lvert z'\rvert$

۱ـ ازجدول بالا نتیجه می‌شودکه اگر نقطه M به‌مختصات ($a=x$ و $b=y$) در ناحیه یکم انتخاب شود معادله درجه دوم (۱) دارای دو ریشه منفی است.

۱ـ بـرای تعیین علامت Δ و P و S مـانند مثال ۱ عمل مـی‌کنیم به این ترتیب‌که مثلا اگر مختصات نقطه (۱ و ۱−) را در $\Delta=(x+1)^2-y$ قراردهیم $\Delta=(-1+1)^2-1$ مقدار $\Delta=-1<0$ مـی‌باشد و لـذا علامت Δ در ازاء مختصات نقطه‌هـای واقع در داخـل سهمی (ناحیه‌های ۲ و ۳) منفی و در سایر ناحیه‌ها بر خلاف آن یعنی مثبت می‌باشد.
ازحل و بحث این‌مسئله راهی‌برای بحث دروجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه دوم که ضریبهای آن شامل دو پارامتر می‌باشد بدست می‌آید.

۲ـ اگر نقطه M در ناحیه‌های دوم و یا سوم باشد معادله (۱) ریشه حقیقی ندارد.

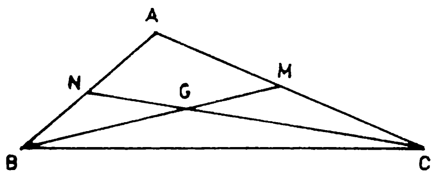
۳ـ اگر نقطه M در ناحیه چهارم باشد معادله (۱) دارای دو ریشه مثبت است.

۴ـ اگر نقطه M در ناحیه پنجم باشد معادله (۱) دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است و قدرمطلق ریشه مثبت بیشتر است.

۵ـ اگر نقطه M در ناحیه ششم باشد معادله (۱) دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است و قدرمطلق ریشه منفی بیشتر است.

۴ـ استفاده از ترسیم‌های هندسی در ثابت کردن قضیه‌ها:

مسئله ۱ـ دو میانه و یك ضلع از مثلثی داده شده است مثلث را رسم کنید. فرض کنیم ازمثلث ABC، ضلع AB و میانه‌های BM، CN داده شده باشد. برای رسم مثلث ابتداء فرض می‌کنیم مسئله حل شده و ABC مثلث مطلوب باشد، (ش ۶۰) G محل تلاقی سه میانه مثلث (مرکز ثقل، گرانیگاه) به فاصله $\frac{۱}{۳}$ طول میانه از وسط ضلع نظیر و $\frac{۲}{۳}$ طول میانه از رأس قرار دارد. از مثلث BNG سه ضلع معلوم است: $BN = \frac{AB}{۲}$، $BG = \frac{۲}{۳} BM$ $NG = \frac{۱}{۳} CN$، بنابراین راه رسم مثلث ABC به ترتیب زیر بدست می‌آید.



شکل ۶۰

ابتداء پاره‌خطی به اندازه $AB = c$ رسم ونقطه N وسط آن را تعیین کرده و مثلث BNG را با معلوم بودن سه‌ضلع آن رسم می‌کنیم و سپس NG را از طرف G امتداد داده و برروی آن $GC = ۲NG$ راجدامی‌کنیم C رأس سوم مثلث است. چون با سه پاره خط NG و BN و BG فقط یك مثلث می‌توان رسم کرد و بر امتداد NG و در طرف راست G فقط یك نقطه مانند C می‌توان تعیین کرد که $GC = ۲NG$ باشد لذا تنها یك مثلث با معلومهای داده شده جواب مسئله است و بنابراین می‌توان قضیه زیر را نتیجه‌گرفت.

قضیه‌ـ هرگاه یك ضلع و دومیانه از مثلثی با یك ضلع و دومیانه از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند آن دو مثلث با هم برابرند.

مسئله ۲ـ از مثلثی دوضلع و زاویه روبروی به‌یکی از آنها داده شده است مثلث را رسم کنید.

این‌مسئله با عنوان حالت چهارم رسم مثلث در ترسیم مثلث (فصل اول ــ بخش اول ــ رسم مثلث) قبلا در این کتاب آمده است و قضیه زیر را از آن می‌توان نتیجه گرفت.

قضیه - هرگاه در دو مثلث دوضلع نظیر متساوی و زاویه‌های روبرو به ضلع بزرگتر از دو مثلث نیز متساوی باشند آن دو مثلث متساویند.

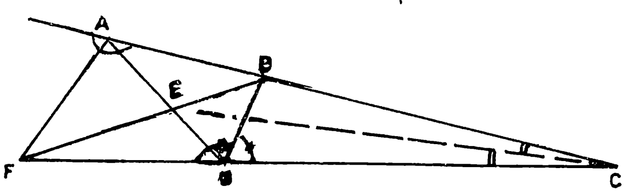
استفاده از ترسیم‌های هندسی در پیدا کردن خاصیت‌های تازه:

مسئله - درمثلث ABC دونیمساز داخلی و نیمساز خارجی زاویه دیگر را رسم کنید و تحقیق کنید سه‌نقطه پاهای، دونیمساز داخلی و نیمساز خارجی روی یك خط راست جای دارند.

درمثلث ABC، BD نیمساز زاویه B و CE نیمساز زاویه C و AF نیمساز زاویه خارجی زاویه A می‌باشد. (ش ۶۱) بنابر خاصیت نیمساز می‌توان نوشت

$$\frac{BC}{AB}=\frac{DC}{DA} \quad (۱) \quad \text{و} \quad \frac{CB}{AC}=\frac{EB}{EA} \quad (۲) \quad \text{و} \quad \frac{AC}{AB}=\frac{FC}{FB} \quad (۳)$$

از تقسیم رابطه اول بر دوم داریم



شکل ۶۱

$$\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{DA}\times\frac{EA}{EB} \quad (۴)$$

از مقایسه رابطه (۳) با رابطه (۴) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{FC}{FB}=\frac{DC}{DA}=\frac{EA}{EB}$$

و یا

$$\frac{FC \cdot DA \cdot EB}{FB \cdot DC \cdot EA}=۱$$

این رابطه نشان می‌دهد[1] (عکس قضیه منلائوس)، (Menelaus) ریاضیدان یونانی) که

---

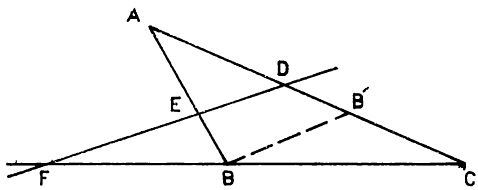
[1] ــ قضیهٔ منلائوس ــ هرگاه خطی ضلعهای AB و AC و BC از مثلث ABC یا امتدادآنها را به‌ترتیب در E و D و F قطع کند رابطه زیر برقرار است
←

سه‌نقطه D و E و F برروی یك خط راست قرار دارند.

آنچه زیر عنوان استفاده از ترسیم‌های هندسی به‌عنوان مثال آورده شده برای ارائه نمونه و توضیح مطلب بوده است و نباید تصور شود که اگر به این مختصر اکتفا شده است

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}\times\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}=1 \quad \longrightarrow$$

برهان ـ از نقطه B خط BB′ را موازی خط قاطع رسم می‌کنیم (ش ۶۲) می‌توان نوشت



شکل ۶۲

$$\frac{EA}{EB}=\frac{DA}{DB'} \quad (1)$$

$$\frac{FB}{FC}=\frac{DB'}{DC} \quad (2)$$

دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) را درهم ضرب می‌کنیم نتیجه می‌شود.

$$\frac{EA}{ED}\times\frac{FB}{FC}=\frac{DA}{DC} \quad (3)$$

دو طرف (رابطه ۳) را در $\frac{DC}{DA}$ ضرب می‌کنیم بدست می‌آید.

دو طرف رابطه (۳) در $\frac{DC}{DA}$ ضرب می‌کنیم بدست می‌آید.

$$\frac{EA}{EB}\times\frac{FB}{FD}\times\frac{DC}{DA}=1$$

ملاحظه می‌شود که EA و EB دارای دوجهت مخالف‌اند و لذا $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$ مقدارمنفی وهمچنین DC و DA دوجهت مخالف دارند و لذا $\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$ منفی و $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}$ دو جهت موافق دارند و لذا $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}$ مقدار مثبت و حاصلضرب $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$ و $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}$ و $\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$ مقدار مثبت است.

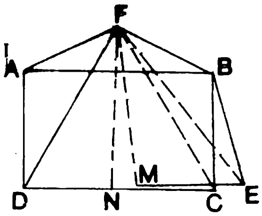
عکس‌قضیه منلائوس نیز به‌همین‌ترتیب ثابت‌می‌شود که اگر سه‌نقطه E و D و F برروی‌ضلعهای AB و AC و BC ازمثلث ABC یا برامتدادآنها چنان‌باشند‌که رابطه $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$ برقرار باشد سه نقطه E و D و F بر روی یك خط راست جای دارند. برای اثبات باید DE را امتداد داد. تا درنقطه F′ امتداد ضلع BC را قطع کند، رابطه منلائوس‌را برای‌قاطع DEF′ ومثلث ABC می‌نویسیم و ازمقایسه این رابطه با رابطه فرض معلوم می‌شود که F′ بر F منطبق است یعنی نقطه F در امتداد خط ED واقع است.

مثالها و نمونه‌ها منحصر می‌باشد. مثالهای متعدد دیگر وجود دارد که نشان می‌دهد ترسیم‌های دقیق و درست هندسی راهنمـای بسیاری از قضیه‌ها و مسئله‌های هندسی است.[1] عـلاوه بر موردهای بالا ترسیم درست شکلهای هندسی راهنما و آسان‌کننده تعیین مکانهای هندسی و پوشها[2] نیز می‌باشد که در این مختصر از فایده ترسیم درمـورد پیداکردن آنها صرفنظر شده است.

۶ـ فایده دقت در رسم شکلهای هندسی.

قبل از بیان مطلب به مسئله زیر توجه‌کنید:

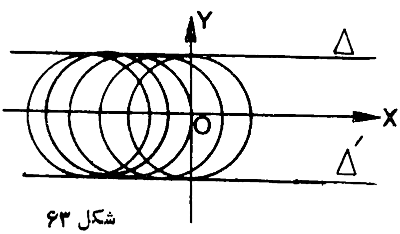
مستطیل ABCD داده شده است (ش ۶۴ الف) از نقطه B خط BE را در خارج مستطیل رسم کرده و بر آن طول BE را مساوی با BC جدا می‌کنیم از نقطه F محل برخورد دوعمود منصف‌های DC و DE به نقطه‌های A و B و C و D و E وصل می‌کنیم دومثلث FAD و FBC با هم و هردو با مثلث FBE



شکل ۶۴ الف

۱ــ ترسیم درست و دقیق راهنمای اثبات قضیه‌های دیگری از جمله اگـر سه میانه یك مثلث نظیر به نظیر با سه میانه مثلث دیگر متساوی باشند آن دو مثلث با هم برابرند و... درمورد پیدا کردن خاصیت‌های جدید از راه ترسیم درست می‌توان چندین مثال مختلف و ازجمله آنکه پاهای نیمسازخارجی زاویه‌های یك مثلث برروی یك خط راست جای دارند و... را ذکر کرد.

۲ــ تعریف پوش یك دسته منحنی ــ معادله یك منحنی‌گاهی علاوه بر متغیرهای x و y شامل مقدارهای ثابتی است که بعدها و شکل و جای این منحنی خاصی را تعیین می‌کند مثلا نمایش معادله $(x-a)^2+y^2=R^2$ دایره‌ای است‌که مرکز آن به فاصله a از مبداء مختصات برروی محور xها قرار دارد و شعاع آن R است. اگر a مقدارهای مختلفی اختیارکند ولـی R ثابت بماند. دراین‌صورت دایره‌های نظیر به‌مقدارهای مختلف a دایره‌هایی برابرند و تنها فاصله‌آنها از مبـداء مختصـات متفاوت است (شکـل ۶۳) مجموعه منحنی‌هایی‌کـه به این طـریق تشکیل می‌شوند، یـك دسته منحنی و مقـدار a را کـه درهریك از منحنی‌ها مقدار ثابتی است و از هر



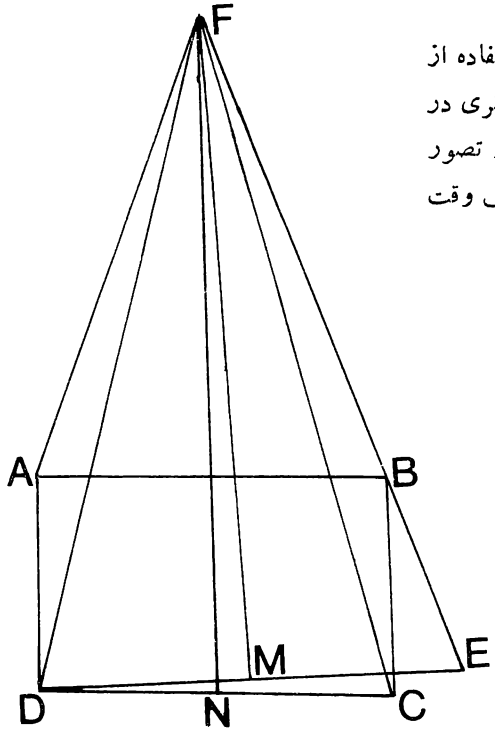
شکل ۶۳

منحنی به منحنی دیگر تغییر می‌کند پارامتر می‌نامند. اگر منحنی‌های یك دسته منحنی به یك یاچند منحنی دیگرمماس باشند دراین‌صورت منحنی یا منحنی‌های‌اخیر را پوش‌آن دسته منحنی می‌نامند مثلا پوش دسته دایره‌های‌بالا دوخط موازی Δ و Δ′ به‌معادله‌های $Y=R$ و $y=-R$ است که بر تمام دایره‌های دسته مماس می‌باشند.

در سه ضلع نظیر به‌نظیر متساویند. نتیجه می‌شود که دو زاویه $\widehat{FBE}$ و $\widehat{FBC}$ با یکدیگر مساوی‌می‌باشند وچون ازهرکدام از این دوزاویه $\widehat{FBA}$ را کم کنیم باقیمانده‌ها نیزمساوی‌اند یعنی زاویه $\widehat{ABC}$ با زاویه $\widehat{ABE}$ برابر است اما ABC یك زاویه قائمه و $\widehat{ABE}$ یك زاویه منفرجه است. اشکال درکجاست؟

حال شکل را بادقت رسم می‌کنیم ملاحظه می‌شود که اشکال ناشی از رسم شکل بوده است. (شکل ۶۴ ب)

بنابراین رسم دقیق شکل و استفاده از ترسیم درست ضمن آنکه راهنمای مؤثری در حل مسئله می‌باشد مانع از اشتباه و تصور نادرست از شکل و جلوگیری از صرف وقت و تلاش بیمورد می‌شود.



شکل ۶۴ ب

برای استفاده ازکتاب توصیه می‌شود که در رسم شکلها ضمن دقت به تدریج عمل کنید. زیرا ممکن است در مرحله اول با ملاحظه شکل یك مسئله حل شده، شکل درهم و غیر مفهوم جلوه‌کند ولی اگر از ابتداء و هماهنگ با سیر پیشرفت حل مسئله شکل را رسم‌کنید این مشکل برطرف می‌شود.

فصل دوم

بخش اول

رسم خط، زاویه، تعیین نقطه

۱ـ زاویهٔ ۷۵ درجه را رسم کنید.

۲ـ کمانی از یك دایره معلوم است، مرکز آنرا پیدا کنید.

۳ـ بطریق هندسی طولهائی برابر $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ رسم کنید.

۴ـ سه پاره‌خط $AB=a$ و $BC=b$ و $AD=d$ داده شده‌اند x را بطریق ترسیم از رابطه $x=\frac{ad}{a+b}$ بدست آورید.

۵ـ قطعه خطی بطول ۲ سانتی‌متر را به نسبت $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ تقسیم کنید.

۶ـ قطعه خطی بطول a مفروض است قطعه خطی رسم کنید که طول آن $a\sqrt{۷}$ باشد.

۷ـ با معلوم بودن طولهای a و b طول x را رسم کنید که در رابطه $ax=b^۲$ سازگار باشد.

۸ـ با معلوم بودن طولهای a و b طول x واسطه توافقی آنها را رسم کنید.

۹ـ پاره‌خطی به طول معلوم a داده شده است پاره‌خطی رسم کنید که اندازه آن $\frac{۱}{a}$ باشد.

۱۰ـ مجموع و واسطه هندسی دوپاره‌خط داده شده آن دوپاره‌خط را بطریق ترسیم بیابید.

۱۱ـ پاره‌خط $AB=a$ داده شده است پاره‌خطی رسم کنید که طول آن $\sqrt{a}$ باشد.

۱۲ـ مجموع وحاصلضرب دوپاره‌خط داده شده است آن دوپاره‌خط را رسم کنید.

۱۳ـ تفاضل و حاصلضرب دوپاره‌خط داده شده آنها را رسم کنید.

۱۴ـ زاویه xoy و پاره‌خط a مفروض است. روی oy نقطه‌ای پیدا کنید که فاصلهٔ آن از ox برابر a باشد.

۱۵ـ خط xy و دو نقطه A و B مفروض‌اند. روی xy نقطه‌ای پیدا کنید که از A و B بیك فاصله باشد: (هردونقطهٔ A و B ویا یکی از آنها ممکن است بر xy واقع، و یا در خارج xy باشند).

۱۶ـ سه نقطه A و B و C مفروضند خطی رسم کنید که فاصله‌های این سه نقطه از آن خط با هم برابر باشند. (نقطه‌های A و B و C روی يك خط راست واقع نیستند).

۱۷ـ نقطه‌ای روی خط مفروض xy چنان پیدا کنید که از دو نقطهٔ مفروض A و B بیك فاصله باشد.

۱۸ـ دونقطهٔ A و B در دوطرف خط D واقع‌اند، از ایـن دونقطهٔ دو خط رسم کنید که نسبت به D متقارن باشند.

۱۹ـ پاره‌خطی به طول و امتداد معلوم را بر دو خط مفروض متکی کنید.

۲۰ـ زاویه xoy و نقطه M داخل آن داده شده است از M خطی چنان رسم کنید که ox را در A و oy را در B قطع کند و $AM=2BM$ باشد.

۲۱ـ ازنقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای خطی بگذارنید که دوضلع زاویه را قطع کند و در M به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود.

۲۲ـ سه نقطه A و B و O مفروض‌است خطی از O چنان رسم کنید که از A و B بیك فاصله باشد.

۲۳ـ بر خط مفروض Δ نقطه‌ای مانند C چنان بیابید که چون آن را به دو نقطه A و B واقع در يك طرف خط Δ وصل کنیم خطهای وصل شده با Δ زاویه‌های مساوی تشکیل دهند.

۲۴ـ زاویهٔ xoy و نقطه P در داخل آن مفروض است، از نقطه P قاطع PAB را چنان رسم کنید که ضلعهای زاویه را در A و B قطع کند و P وسط AB باشد.

۲۵ـ دوخط d و d' در حدود کاغذ به هم نمی‌رسند، خطی پیدا کنید کـه از نقطه مفروض P عبور کرده و از محل تلاقی دوخط d و d' بگذرد.

۲۶ـ زاویه xoy مفروض است. نقطهٔ B را روی ox و C را روی oy درنظر می‌گیریم، نقطه M را روی ox و N را روی oy چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$NB=NC \quad و \quad MB=MC$$

۲۷ـ دوخط متوازی x و y و نقطه P درخارج آنها مفروض است، AB را بردو خط مفروض چنان عمود کنید که $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ باشد.

۲۸ـ از نقطه مفروض P خطی رسم کنید که نسبت فاصله دو نقطهٔ معلوم A و B از آن برابر $\frac{m}{n}$ باشد.

۲۹ـ نیمساز زاویه‌ای را که رأسش در خارج صفحهٔ کاغذ است رسم کنید.

۳۰ـ دوخط متقاطع x و y و نقطه P وامتداد Δ مفروض‌اند خطی بموازات Δ چنان رسم کنید که x را در A و y را در B قطع کند و $PA=PB$ باشد.

۳۱ـ خطی رسم کنید که سه خط مفروض d_1 و d_2 و d_3 را در M و N و P قطع کند بطوری که $MN=NP$ باشد.

۳۲ـ سه‌خط d_1 و d_2 و d_3 مفروضند خطی عمود بر d_2 رسم کنید که دوخط دیگر را قطع کند و بوسیله d_2 به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۳۳ـ سه خط همرس X و Y و Z و نقطه P مفروض‌اند از P خطی چنان مرور دهید که این سه خط را در A و B و C قطع کند و C وسط AB باشد.

۳۴ـ دوخط X و X' و دونقطه A و B روی X مفروض‌اند. دوخط متوازی AA' و BB' را چنان رسم کنید که X' را در A' و B' قطع کنند ومساحت ذوزنقه $AA'B'B$ مساوی مقدار معلوم m^2 باشد.

۳۵ـ زاویه Xoy مفروض است. نقطه‌ای مانند A روی ضلع oX و نقطه‌ای مانند B روی ضلع oy طوری اختیار کنید که: $\frac{oA}{oB}=\frac{m}{n}$ و $AB=L$ باشد. (L , n , m سه طول معلوم هستند).

۳۶ـ مثلث ABC مفروض است. روی AB نقطهٔ D را چنان تعیین کنید که اگر DE را بموازات BC رسم کنیم $\frac{BD}{DE}$ برابر $\frac{m}{n}$ شود.

۳۷ـ دوخط متوازی و نقطه A مفروض‌اند. از نقطه A خطی چنان رسم کنید که قسمت محصور بین دوخط برابر L باشد.

۳۸ـ سه نقطه A و B و C داده شده‌اند خطی مانند d رسم کنید که اگر عمودهای AA' و BB' و CC' را برآن فرود آوریم $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ و $\frac{BB'}{CC'}=\frac{n}{r}$ شود.

۳۹ـ سه نقطه M و N و P داده شده‌اند بر M خطی بگذرانید که نسبت فاصله‌های

دونقطه N و P از آن مساوی h باشد.

۴۰ــ دوخط d و d' مفروض‌اند. نقطه‌ای پیداکنیدکه از d بفاصله L و از d' بفاصله L' باشد.

۴۱ــ سه‌خط متوازی d و d' و d'' و نقطه A داده شده‌است. از نقطه A خطی چنان رسم کنیدکه سه‌خط مزبور را به‌ترتیب در B و C و D قطع کرده و $BC-CD$ برابر طول معیین l باشد

۴۲ــ نقطه‌ای پیداکنیدکه نسبت فاصله‌های آن از سه ضلع مثلث متناسب با عددهای p و q و r باشد.

۴۳ــ روی خط مفروض D نقطه‌ای معین‌کنیدکه از دوخط متقاطع $X'X$ و $y'y$ به یك فاصله باشد.

۴۴ــ دونقطه A و B و دوخط غیرمشخص xx' و yy' مفروض‌اند. نقطه‌ای مانند M چنان پیداکنیدکه اولا بیك فاصله از A و B. ثانیاً به یك فاصله از xx' و yy' باشد، (در حالت‌های مختلف و تعداد جوابها بحث‌کنید.)

۴۵ــ از سه نقطه مفروض غیرواقع بر یك خط راست، خطهای راست موازی با هم چنان رسم‌کنیدکه فاصله بین آنها با هم برابر باشد.

۴۶ــ سه خط متقارب d_1 و d_2 و d_3 مفروضند، از نقطه M خطی مرور دهیدکه اگر d_1 و d_2 و d_3 را به ترتیب در A و B و C قطع‌کند $\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$ باشد.

۴۷ــ خط xy و دونقطه A و B در یك طرف آن مفروض‌اند روی xy نقطه‌ای مانند M چنان بیابیدکه $\widehat{AMy}=2\widehat{BMX}$ باشد.

۴۸ــ زاویه xoy و دونقطه A و B در داخل زاویه داده شده است. دونقطه M و N را روی ox و oy طوری تعیین‌کنید که مجموع $AM+MN+NB$ می‌نیمم باشد.

۴۹ــ سه‌نقطه A و B و C غیرواقع بریك خط راست داده شده‌اند از A خط D را چنان رسم‌کنیدکه مجموع فاصله‌های B و C از D برابر با طول معیین l باشد.

۵۰ــ خطی در داخل ذوزنقه موازی دوقاعده چنان رسم‌کنیدکه به وسیله دوقطر ذوزنقه و نقطه‌های تلاقی با ساقها به سه قسمت متساوی تقسیم شود.

۵۱ــ دوخط D و D' و یك نقطه A داده شده از A خطی چنان رسم‌کنیدکه D و D' را به‌ترتیب در M و N قطع‌کند و AM یك سوم AN باشد. (A خارج قطعه خط MN فرض شود)

۵۲ـ کمانی از دایره را به‌دوقسمت‌چنان‌تقسیم کنید که وترهایشان به‌نسبت $\frac{m}{n}$ باشد.

۵۳ـ قطعه خط AB را به‌دوقسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعاتشان k^2 باشد.

۵۴ـ قطعه خط AB را به‌دوقسمت چنان تقسیم کنید که تفاضل مربعاتشان k^2 باشد.

۵۵ـ نقطهٔ M را در داخل مثلث ABC بطریقی تعیین کنید که از آن نقطه سه ضلع مثلث به یك زاویه دیده شوند، یعنی اگر از M به سه رأس مثلث وصل کنیم سه زاویه متساوی تشکیل شود.

۵۶ـ مثلث ABC مفروض است روی AB نقطه‌ای مانند D چنان اختیار کنید که اگر از D خطی بموازات BC رسم کنیم تا AC را در E قطع کند، DE برابر CE شود.

۵۷ـ مثلثی را با خطی موازی یکی از ضلعها به دوقسمت متعادل تقسیم کنید.

۵۸ـ مثلث ABC مفروض است. از رأس A خطی چنان رسم کنید که اگر از B و C عمودهای BB' و CC' را بر آن فرود آوریم $B'C'$ برابر L شود.

۵۹ـ درمثلث ABC مثلثی محاط کنید که ضلعهای آن‌موازی با سه‌خط مفروض‌باشند.

۶۰ـ نقطه A و خط Δ داده شده است از نقطه A دو خط چنان رسم کنید که با یکدیگر زاویه معلوم α را تشکیل داده و روی Δ پاره‌خطی به‌طول معلوم l جدا کنند.

۶۱ـ دوخط موازی D و D' و دونقطه A و B داده شده‌است. از نقطه B قاطع Δ را چنان رسم کنید که D و D' را در M و N قطع کند و نقطه A از M و N به یك فاصله باشد.

۶۲ـ مثلثی را به دوقسمت متعادل بوسیله خطی عمود بر یك ضلع تقسیم کنید.

۶۳ـ مثلثی متشابه با مثلث ABC بسازید که طول محیطش $2P'$ معلوم باشد.

۶۴ـ ازرأس A سه‌خط چنان رسم کنید که سطح‌مثلث ABC را به‌نسبت ۲ و ۳ و ۵ تقسیم کند.

۶۵ـ درمثلث ABC که $AB > AC$ است در نقطه‌ای مانند M قرینه B نسبت به C قاطعی رسم کنید که چون AC را در N و AB را در L قطع کند و $BL = 2NC$ باشد.

۶۶ـ مثلث ABC داده شده است نقطه‌ای برامتداد یك ضلع چنان بیابید که فاصله این نقطه تا رأس دیگر مثلث، واسطه هندسی بین فاصله‌های این نقطه تا دو راس دیگر باشد، نقطه بر امتداد ضلع آن انتخاب شده است.

۶۷ـ مثلث ABC داده شده است. خطی موازی BC چنان رسم کنید که AB را در D و AC را در E قطع کند و $AD = CE$ باشد.

۶۸ـ خط D را چنان‌رسم کنید که فاصله‌های آن از دونقطه مفروض P و Q به‌ترتیب برابر a و b باشد.

۶۹ـ مثلث ABC داده شده‌است، نقطه M را روی ضلع AB ونقطه N را روی ضلع AC چنان بگیرید که $BM=NC$ و MN مساوی با طول معلوم l باشد.

۷۰ـ دوخط متوازی D و D' و دونقطه A و B داده شده از A خط Δ را چنان رسم کنیدکه D و D' را به‌ترتیب در M و N قطع کند و $\frac{MI}{NI}=K$ باشد. (K مقداری ثابت و I تصویر B برروی خط Δ میباشد.)

۷۱ـ پاره‌خط AB، ونقطه C بر روی‌آن و خط Δ راکه بر A می‌گذرد داده شده است نقطه M را برروی خط Δ چنان بیابیدکه ازآن، دوپاره‌خط AC و BC به‌یك زاویه دیده شوند.

بخش دوم

رسم مثلث

۷۲ــ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۷۳ــ از مثلثی یك ضلع وارتفاع ومیانه وارد بر این ضلع معلوم است مثلث را رسم کنید.

۷۴ــ از مثلثی دو زاویه و یك میانه معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۷۵ــ بین مثلث‌هایی‌که در یك ضلع و زاویه روبه‌روی به‌آن ضلع، برابرند مثلثی‌را تعیین‌کنید‌که محیط آن بزرگترین مقدار را داشته باشد وآن را رسم کنید.

۷۶ــ بین همه مثلث‌هایی‌که در یك ضلع و زاویه روبه‌روی به‌آن ضلع برابر باشند مثلثی را تعیین‌کنید‌که مساحت آن بیشترین مقدار باشد و آن را رسم کنید.

۷۷ــ بین همه‌مثلث‌هایی‌که دارای محیط ثابتی‌می‌باشند مثلثی‌را تعیین‌کنید‌که مساحت آن بیشترین باشد و آن را رسم کنید.

۷۸ــ نقطه A در داخل زاویه xoy داده شده است مثلثی رسم‌کنید‌که یك رأس‌آن نقطه A و دو رأس دیگرش بر ضلعهای زاویه واقع بوده وکمترین محیط را داشته باشد.

۷۹ــ از مثلثی دومیانه و ضلعی‌که میانهٔ آن رسم شده است در دست است. مثلث را رسم کنید.

۸۰ــ دومیانه و ضلعی‌که یکی از میانه‌های آن معلوم است داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۸۱ــ از مثلثی ضلع b و زاویه A و نیمساز این زاویه معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۸۲ــ وسطهای ضلعهای مثلثی معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۸۳ــ از مثلثی سه میانه معلوم است، آنرا رسم کنید.

۸۴ــ مثلث ABC را با معلوم بودن زاویه A و دو ارتفاع رأسهای B و C رسم کنید.

۸۵ــ از مثلثی دو ارتفاع و یکی از ضعلهایی‌که ارتفاع‌آن داده شده در دست است است مثلث را رسم کنید.

۸۶ــ مثلثی رسم کنیدکه طول سه ارتفاعش معلوم است.

۸۷ــ از مثلثی دوضلع BC و AC و تفاضل دوزاویه A و B داده شده است مثلث را رسم کنید.

۸۸ــ از مثلثی دوضلع و شعاع دایرهٔ محیطی معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۸۹ــ مثلثی رسم کنیدکه طول دوضلع و طول نیمساز زاویه بین آنها معلوم است.

۹۰ــ از مثلثی یك ضلع و زاویهٔ مجاور به‌آن و شعاع دایرهٔ محیطی معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۹۱ــ از مثلثی یك ضلع و زاویه مجاور به‌آن و شعاع دایرهٔ محاطی معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۹۲ــ مثلثی رسم کنیدکه ضلع BC و میانه رأس A و ارتفاع رأس B معلوم است.

۹۳ــ از مثلثی دو زاویه و یك ارتفاع داده شده است، مثلث را رسم کنید.

۹۴ــ ازمثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی ارتفاع وارد بر وتر معلوم‌است، مثلث را رسم کنید.

۹۵ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیدکه ارتفاع وارد بر وتر وشعاع دایره محاطی‌آن معلوم است.

۹۶ــ وتر و میانهٔ وارد بر یك ضلع مثلث قائم‌الزاویه معلوم است‌آن را رسم کنید.

۹۷ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیدکه زاویه B و تفاضل دو ضلع این زاویه معلوم است.

۹۸ــ از مثلث متساوی‌الساقینی طول قاعده و ارتفاع وارد بر یکی از ساقها معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۹۹ــ از مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(\hat{A} = ۹۰)$ میانه BM و ارتفاع AH معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۰۰ــ از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر و شعاع دایره محاطی خارجی یکی از زاویه‌های حاده معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۰۱ــ دوخط عمود برهم $x'ox$ و $y'oy$ و نقطه A غیرواقع بر آنها داده شده

است مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A=90^\circ)$ را چنان رسم کنید که B روی $x'x$ و C روی $y'y$ واقع بوده و BC به طول معلوم a باشد. (A در صفحه xoy واقع است).

۱۰۲ـ ازمثلث قائم‌الزاویه ABC، وتر $BC=a$ و زاویه میانه BM با وتر داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۰۳ـ از مثلث قائم‌الزاویه ABC وتر BC به طول a و $AH+BH=l$ (H پای ارتفاع وارد بر وتر است) داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۰۴ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC را بامعلومات دایرهٔ محیطی ومجموع ضلع BC و ارتفاع نظیر آن رسم کنید.

۱۰۵ـ دایره محیطی مثلث ABC و رأس A و نقطه تلاقی h_b با دایره محیطی و امتداد h_a داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۰۶ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ را با معلومات زاویهٔ برأس A و مجموع قاعده و ارتفاع نظیر آن رسم کنید.

۱۰۷ـ مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاعش معلوم است.

۱۰۸ـ مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که سه ارتفاعش معلوم است.

۱۰۹ـ دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه ABC داده شده است مثلث ABC را رسم کنید درصورتیکه زاویه حاده B ونقطه I یکی ازنقطه‌های ضلع AB داده شده باشد.

۱۱۰ـ ازمثلثی یك زاویه و ارتفاع و نیمسازی‌که ازاین رأس میگذرد معلوم است. آنرا رسم کنید.

۱۱۱ـ مثلثی رسم کنید که درآن زاویه A و طول میانه‌های نظیرضلعهای این‌زاویه معلوم است.

۱۱۲ـ از مثلثی دوضلع و یك میانه معلوم است، مثلث را رسم کنید. (دوحالت)

۱۱۳ـ محل برخورد امتداد ارتفاع و میانه و نیمساز یك رأس از مثلثی با دایره محیطی آن معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۱۴ـ از مثلثی a و A و نیمساز این زاویه معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۱۵ـ از مثلثی ضلع c، h_b و m_a داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۱۶ـ از مثلثی دوضلع a و b و زاویهٔ A معلوم است، به شرطی‌که $a>b$ باشد مثلث را رسم کنید.

۱۱۷ـ از مثلثی یك ضلع و ارتفاع وارد برآن و میانه وارد بر ضلع دیگر معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۱۱۸ـ از مثلثی دومیانه و یك ضلع معلوم است، مثلث را رسم کنید. (دوحالت)

۱۱۹ــ مثلث ABC را با معلومات $AB=c$ و $AC=b$ و طول L نیمساز AD رسم کنید.

۱۲۰ــ نقطه p و دوخط متوازی D و D' مفروض‌اند مثلث متساوی‌الساقین به‌رأس p را که زاویه رأسش α باشد چنان رسم کنید که دو رأس‌دیگرش روی خطهای D و D' واقع شوند.

۱۲۱ــ مثلثی در دایره O محاط‌کنبدکه ضعلهایش با سه خط مفروض موازی باشد.

۱۲۲ــ از مثلث ABC، ضلع c و ارتفاع h_b و طول میانه m_a داده شده مثلث را رسم‌کنید.

۱۲۳ــ سه خط متوازی Δ و Δ' و Δ'' داده شده است مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنیدکه سه رأس آن براین سه خط واقع باشد.

۱۲۴ــ از مثلثی AC و M محل تلاقی نیمساز زاویهٔ داخلی با AC وطول نیمساز زاویه $A\hat{B}C$ در دست است، مثلث را رسم‌کنید.

۱۲۵ــ مطلوب است رسم مثلثی‌که از آن زاویهٔ A و نسبت دوضلع $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{m}{n}$ و طول نیمساز داخلی زاویه A معلوم است.

۱۲۶ــ مثلثی رسم‌کنیدکه از آن طول یك ضلع و زاویه مقابل به آن و شعاع دایره محاطی معلوم باشد.

۱۲۷ــ از مثلثی یك ضلع و زاویه مجاور به‌آن ومیانه نظیر این ضلع داده شده‌است مثلث را رسم‌کنید.

۱۲۸ــ از مثلثی رأس A و AX، امتداد ضلع AB و M و M' نقطه‌های تلاقی نیمسازهای رأس C با AB در دست است، رأس B را بدست‌آورید.

۱۲۹ــ از مثلثی دو زاویه و یك نیمساز معلوم است. مثلث را رسم‌کنید.

۱۳۰ــ ازمثلثی a و b و $\hat{A}-\hat{B}$ داده شده مثلث را رسم‌کنید.

۱۳۱ــ از مثلثی زاویه C و S (مساحت مثلث) و $a+b-c=K$ داده شده مثلث را رسم‌کنید.

۱۳۲ــ از مثلثی a و h_a و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ معلوم است مثلث را رسم‌کنید.

۱۳۳ــ مثلثی رسم کنید که زاویه‌های B و C و مجموع $AB+AC=K$ معلوم است.

۱۳۴ــ مثلثی رسم‌کنیدکه دو زاویه و شعاع دایرهٔ محاطی‌آن معلوم است.

۱۳۵ـ مثلثی رسم کنید که زاویهٔ A و ضلع BC و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم است.

۱۳۶ـ از مثلثی A و b و $\frac{d_a}{d'_a}=m$ داده شده (d_a و d'_a نیمسازهـای داخلـی و خارجی زاویه A می‌باشند) مثلث را رسم کنید.

۱۳۷ـ از مثلثی R (شعاع دایره محیطی) و d (انـدازه نیمساز زاویه A) و تفاضل $B-C=\alpha$ داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۳۸ـ از مثلثی ضلع a و A و d'_a (طـول نیمساز زاویه خـارجی A) معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۳۹ـ در مثلثی ضلعها جمله‌های متوالی تصاعد عددی و ضلع a جمله وسط می‌باشد با معلوم بودن زاویه A مثلث را رسم کنید.

۱۴۰ـ از مثلثی زاویه A و ارتفاع و میانـه وارد از رأس A معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۱ـ از مثلثی ارتفاع و میانه و نیمساز رأس A معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۲ـ از مثلثی زاویه A و ضلع c و $\frac{a}{AM}=2q$ معلوم است (AM میانه وارد از راس A) مثلث را رسم کنید.

۱۴۳ـ از مثلثی ضلع $BC=a$ و $S=\frac{ma^2}{4}$ معلـوم و رابطـه $b^2+c^2=2a^2$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۴۴ـ از مثلثی A و طول نیمساز داخلی این زاویه d_a و $l=a-(b+c)$ معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۵ـ از مثلثی a و $b+c=l$ و r_a معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۶ـ از مثلثی A و ضلع c و $\frac{a+b}{c}=K$ معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۷ـ از مثلثی ضلع a و زاویـه A و r شعاع دایـره محاطی داخلـی معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۴۸ـ از مثلثی شعاع دایره محیطی R وشعاعهای دایره‌های محاطی داخلی وخارجی زاویه A، r و r_1 معلوم است مثلث‌را رسم کنید. (r_1 شعاع‌دایره محاطی خارجی رأس A می‌باشد)

۱۴۹ــ از مثلثی زاویه A و ضلع b و نسبت $\frac{a}{m_a}=k$ داده شده مثلث‌را رسم کنید.
(m_a اندازه میانه وارد نظیر ضلع a می‌باشد)

۱۵۰ــ ازمثلثی A و h_a (ارتفاع‌وارد از رأس A) داده شده و به‌علاوه $2a=b+c$ بین ضلعها برقرار است مثلث را رسم کنید.

۱۵۱ــ از مثلثی ارتفاع و میانه رأس A و مجموع $b+c=l$ داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۵۲ــ از مثلثی a و $b+c=l$ و α زاویه حاده بین نیمساز و ضلع a داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۵۳ــ از مثلثی A و r شعاع دایره محاطی داخلی و R شعاع دایره محیطی معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۵۴ــ از مثلثی ضلع a و زاویه A معلوم و میانه‌های ضلعهای b و c برهم عمودند مثلث را رسم کنید.

۱۵۵ــ از مثلثی ضلع a و زاویه A و $b-c=K$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۵۶ــ از مثلثی a و زاویه B و $b+c=l$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۵۷ــ از مثلثی زاویه A و R شعاع دایره محیطی و $b^2-c^2=K^2$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۵۸ــ از مثلثی a و زاویه A و m_b (میانه وارد بر ضلع AC) داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۵۹ــ از مثلثی a و زاویه A معلوم و دراین مثلث رابطه $b^2+c^2=K^2$ برقرار است مثلث را رسم کنید.

۱۶۰ــ از مثلثی A و m_a و S داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۶۱ــ از مثلثی m_a (میانه وارد بر ضلع a) و زاویه‌های β و α که این میانه با دوضلع AB و AC تشکیل می‌دهد داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۶۲ــ از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC موضع رأس A مشخص است و راسهای B و C برروی دو دایره مفروض دارای یك مرکز، واقع‌اند مثلث را رسم کنید.

۱۶۳ــ از مثلثی a و s و $b+c=l$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۱۶۴ دو نقطه A و G و دو خط D و D' داده شده است، مثلثی رسم کنید که A یك رأس آن و G مرکز ثقل و دو رأس B و C از آن به‌ترتیب بر دوخط D و D' واقع باشد.

۱۶۵ــ از مثلثی محیط و دو زاویه B و C معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۶۶– ازمثلثی a و زاویه A و رابطه $b^۲-c^۲=k^۲$ داده شده‌است مثلث را رسم کنید.

۱۶۷– از مثلث ABC، رأس‌های B و C بر خط معلوم D واقع‌اند و M و N پای ارتفاعهای وارد از رأس‌های B و C معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۶۸– از مثلث ABC، رأس A، و H نقطه برخورد سه ارتفاع (مرکز مثلث ارتفاعیه) و O مرکز دایره محیطی آن معلوم است مثلث را رسم کنید.

۱۶۹– ازمثلثی A و ضلع a و m_a (میانه وارد بر ضلع a) داده شده است مثلث را رسم کنید.

۱۷۰– مثلث قائم‌الزاویه ABC داده شده‌است. نقطه N را درون مثلث طوری پیدا کنید که زاویه‌های NBC و NCA و NAB برابر باشند. (مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان)

۱۷۱– دایره K به مرکز O و دونقطه P و Q داده شده است مثلث قائم‌الزاویه‌ای در دایره محاط کنید که دوضلع مجاور به‌زاویه قائمه‌آن از P و Q بگذرند. درچه موقعیتی از P و Q مسئله جواب ندارد. (مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان)

۱۷۲– پای ارتفاعهای یک مثلث داده شده است مثلث را رسم کنید. (مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان)

۱۷۳– از مثلثی ضلع a و $a+b-c=d$ معلوم و به علاوه $\hat{C}=۲\hat{B}$ می‌باشدمثلث را رسم کنید.

۱۷۴– از مثلثی زاویه A و $a+b=p$ و $a+c=q$ معلوم است مثلث را رسم کنید.

بخش سوم

رسم چند ضلعی‌ها

۱۷۵ــ پنج ضلعی منتظم به ضلع مفروض a را رسم کنید.

۱۷۶ــ قطر مربعی معلوم است آنرا رسم کنید.

۱۷۷ــ نقطه A و خط Δ مفروض است مربعی به ضلع a رسم کنید که یک رأسش نقطه A و مرکزش بر روی Δ باشد.

۱۷۸ــ مربعی رسم کنید که تفاضل قطر و ضلعش معلوم است.

۱۷۹ــ از مربعی مجموع طول ضلع و قطر در دست است مربع را رسم کنید.

۱۸۰ــ در مربعی به ضلع a مربع دیگری به مساحت b^2 محاط کنید.

۱۸۱ــ مثلث ABC داده شده است. دراین مثلث مربعی محاط کنید که دو رأس آن بر ضلع BC واقع باشد.

۱۸۲ــ چهارنقطه A و B و C و D بریک خط راست جای دارند مربعی رسم کنید که امتداد ضلعهای آن از این نقطه‌ها بگذرد.

۱۸۳ــ مربعی رسم کنید که ضلعها یا امتداد ضلعهای آن برچهار نقطه A و B و C و D بگذرند.

۱۸۴ــ A و B و C و D را، چهارنقطه واقع بریک خط راست I می‌گیریم. مربعی رسم کنید که دوضلع موازی آن (یا امتدادهای آنها) از نقطه‌های A و B و دوضلع دیگر آن (یا امتدادهای آنها) از نقطه‌های C و D بگذرند. (مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان)

۱۸۵- مربع ABCD را چنان رسم کنید که ضلعهایش به‌ترتیب بر چهار نقطه معیین M، N و S و T بگذرند.

۱۸۶- ABCD را یك مستطیل می‌گیریم و نقطه‌های برخورد خط راست e را با ضلعهای AB، AC، AD و BC، ویا امتداد آنها، بترتیب M، N، P، Q می‌نامیم. اگر نقطه‌های M، N، P، Q وهمچنین مقدار p طول‌ضلع AB مفروض‌باشند، مستطیل را رسم کنید. با چه شرطهایی مسئله جواب دارد. (مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان)

۱۸۷- درمستطیل‌مفروض، مستطیلی محاط کنید که نسبت ضلعهای‌آن مثل p : q باشد.

۱۸۸- از یك‌متوازی‌الاضلاع یك زاویه حاده ($\hat{A}=\alpha$) وفاصله محل‌تلاقی قطرها از دوضلع مجاور داده شد. (m و p) متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۱۸۹- دونقطه A و B و دایره (O) داده شده است، متوازی‌الاضلاعی رسم‌کنید که دو رأس آن A و B و دو رأس دیگرش روی محیط دایره (O) باشد.

۱۹۰- از متوازی‌الاضلاعی دوضلع و ارتفاع آن معلوم است، متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۱۹۱- از متوازی‌الاضلاعی دوضلع و زاویه بین قطر و یك ضلع معلوم است. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۱۹۲- از متوازی‌الاضلاعی اندازه هریك از دوقطر و زاویه بین آنها معلوم است. متوازی‌الاضلاعی را رسم‌کنید.

۱۹۳- ازمتوازی‌الاضلاعی طول دوضلع و اندازه یك قطر معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۹۴- از متوازی‌الاضلاع ABCD اندازه‌های دوضلع AB و AD و زاویه بین دو قطر داده شده متوازی‌الاضلاع را رسم‌کنید.

۱۹۵- در متوازی‌الاضلاع مفروض مربعی محاط‌کنید.

۱۹۶- در چهارضلعی مفروض متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که مرکزش نقطه M باشد.

۱۹۷- در متوازی‌الاضلاع مفروض ABCD مثلث متساوی‌الساقین AMN به‌رأس A و زاویه α را چنان محاط‌کنیدکه M بر BC و N بر CD واقع باشد.

۱۹۸- در متوازی‌الاضلاع مفروض ABCD مستطیل MNST را چنان محاط‌کنید که زاویه بین دوقطر آن برابر با مقدار معلوم α باشد.

۱۹۹- متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است در این متوازی‌الاضلاع لوزی MNST را چنان محاط‌کنیدکه نسبت قطرهای‌آن به‌نسبت معیین $\frac{m}{n}$ باشد.

۲۰۰ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که محیط، طول یك قطر و زاویه‌ای که این قطر با یك ضلع می‌سازد معلوم است.

۲۰۱ــ از یك لوزی طول ضلع و طول یکی ازقطرهایش معلوم است لوزی را رسم کنید.

۲۰۲ــ در چهارضلعی مفروض یك لوزی چنان محاط کنید که ضلعهای آن موازی با قطرهای چهارضلعی باشند.

۲۰۳ــ ذوزنقه $ABCD$ محاطی است و دایره محیطی آن داده شده‌است قاعده AB برابر با l و کمان AD یك‌سوم کمان $ABCD$ است ذوزنقه را رسم کنید.

۲۰۴ــ ذوزنقه‌ای رسم کنید که از آن اندازه یك زاویه، اندازه‌های دوقطر و l اندازه قطعه خط وصل شده بین وسطهای دوساق معلوم است.

۲۰۵ــ از ذوزنقه متساوی‌الساقینی طول هریك از دوقاعده و اندازهٔ تفاضل دوزاویهٔ غیرمساوی داده شده، ذوزنقه را رسم کنید.

۲۰۶ــ از ذوزنقه‌ای طول دوقطر و یك قاعده و یك‌زاویه مجاور به‌همان قاعده معلوم است، آنرا رسم کنید.

۲۰۷ــ ذوزنقه‌ای را بوسیله خطهایی که با دوقاعده متقاطع باشند به سه‌قسمت متعادل تقسیم کنید.

۲۰۸ــ از ذوزنقه $ABCD$ که محاطی می‌باشد قطر BD و زاویه ADB (بین قطر و یك ساق) و قاعده AB داده شده ذوزنقه را رسم کنید.

۲۰۹ــ از ذوزنقه $ABCD$ قاعده بزرگتر $CD=a$ و قاعده کوچکتر $AB=b$ و زاویه‌های $\hat{C}=60°$ و $\hat{D}=30°$ داده شده ذوزنقه را رسم کنید.

۲۱۰ــ از ذوزنقه‌ای اندازه‌های دوقطر و زاویه بین آنها واندازه یك ضلع داده شده ذوزنقه را رسم کنید.

۲۱۱ــ از ذوزنقه‌ای اندازه‌های چهارضلع معلوم است آن را رسم کنید.

۲۱۲ــ از چهارضلعی $ABCD$، اندازه چهارضلع و زاویه بین دوضلع مقابل داده شده است چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱۳ــ از یك چهارضلعی اندازه طول هریك از چهارضلع داده شده وبعلاوه یکی از قطرها نیمساز یك زاویه رأس مربوط به‌آن است چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱۴ــ از یك چهارضلعی محاطی دوضلع و زاویه بین آنها و قطر مربوط به رأس

این زاویه معلوم است آنرا رسم کنید.

۲۱۵ــ چهارضلع یك چهارضلعی محاطی معلوم است، آنرا رسم کنید.

۲۱۶ــ ازیك چهارضلعی محیطی شعاع دایرهٔ محاطی وطول محیط و دوزاویه مجاور داده شده‌اند. چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱۷ــ از چهارضلعی محدب $ABCD$، ضلعهای AB و BC و CD و زاویه‌های مقابل $\hat{B}$ و $\hat{D}$ معلوم است چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱۸ــ چهارضلعی محاطی $ABCD$ را که در آن $AB=۲a$ و $\hat{A}=۶۰°$ و $\hat{B}=۷۵°$ و $CD=a\sqrt{۲}$ است، رسم کنید.

۲۱۹ــ ازچهارضلعی $ABCD$ ضلعهای $AB=a$ و $BC=b$ و $DA=d$ و زاویه B و زاویهٔ بین BC و AD در دست است آنرا رسم کنید.

۲۲۰ــ چهارضلعی $ABCD$ داده شده است مربعی رسم کنید که بر این چهارضلعی محیط باشد.

۲۲۱ــ از چهارضلعی $ABCD$ اندازه‌های چهارضلع آن $DA=d$ و $CD=c$ و $BC=b$ و $AB=a$ وطول پاره‌خطی که وسطهای دوضلع مقابل AB و DC را به‌هم وصل می‌کند معلوم است چهارضلعی را رسم کنید.

۲۲۲ــ از چهارضلعی $ABCD$ اندازه‌های چهارضلع و اندازه پاره‌خطی که وسطهای دوقطر آن را به‌هم وصل می‌کند معلوم است آن را رسم کنید.

۲۲۳ــ n ضلعی .... $ABCDE$ مفروض است، چند ضلعی دیگری ترسیم کنید که $n-۱$ ضلع داشته و معادل چند ضلعی داده شده باشد.

۲۲۴ــ چهارضلعی $ABCD$ را بامعلوم بودن اندازه‌های دوضلع مقابل AB و CD و اندازه‌های چهار زاویه رسم کنید.

۲۲۵ــ از چهارضلعی $ABCD$، اندازه‌های دوضلع مقابل AD و BC و زاویه بین این دوضلع و اندازه‌های دوقطر معلوم است چهارضلعی را رسم کنید.

۲۲۶ــ ازچهارضلعی $ABCD$ طول قطر BD وتفاضل‌مربعهای AD و AB، اندازه زاویه ACD ونسبت $\frac{AI}{IC}=K$ معلوم است، این چهارضلعی را رسم کنید (I نقطه تلاقی دوقطر است).

۲۲۷ــ ازچهارضلی $ABCD$، اندازه‌های دوقطر AC و BD ونسبت دوضلع AB

و AD واندازه پاره‌خط TN که وسطهای دوضلع مقابل AD و BC را به‌هم وصل می‌کند و زاویه بین دوضلع دیگر معلوم است چهارضلعی را رسم‌کنید.

۲۲۸ــ دایره O و نقطه‌های ثابت A و B و C بر روی آن‌مفروض‌انداگر $AB=a$ و $BC=b$ باشد $(a>b)$ نقطه‌ای مانند D بر روی این‌دایره چنان پیداکنید که چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد.

بخش چهارم

ترسیم‌های مربوط به دایره

۲۲۹ـ دایره را به n قسمت متساوی تقسیم کنید.

۲۳۰ـ رسم پاره‌خطی که طولش تقریباً مساوی با محیط دایره مفروض به‌شعاع R باشد.

۲۳۱ـ پاره‌خطی به‌طول کمان مفروض رسم کنید.

۲۳۲ـ دایره O و مستطیل $ABCD$ و نقطه M در خارج دایره و مستطیل داده شده است بر روی مستطیل و دایره نقطه‌هایی بدست آورید که دو به‌دو با M در یك استقامت باشند و M وسط آن باشد.

۲۳۳ـ خط d و نقطهٔ A واقع بر آن و نقطهٔ B درخارج آن مفروضند دایره‌ای چنان رسم کنید که از B بگذرد و در نقطهٔ A بر خط d مماس باشد.

۲۳۴ـ نقطه P و دایرهٔ O مفروض است از نقطه P قاطعی چنان رسم کنید که در دایره وتری بطول معلوم L جدا کند.

۲۳۵ـ دو دایره که دارای یك مرکز می‌باشند، داده شده از نقطه A واقع بر دایره بزرگتر خطی چنان رسم کنید که به‌وسیله این دو دایره به سه قسمت مساوی تقسیم شود.

۲۳۶ـ نیمدایره‌ای به‌قطر AB داده‌شده مماس درنقطه B را رسم می‌کنیم و ازنقطه A قاطعی می‌کشیم تا محیط نیمدایره را در C و مماس مزبور را در D قطع کند. اگر α زاویه بین قاطع و قطر AB باشد زاویه α را به‌طریقی تعیین کنید که $AD = ۴AC$ باشد.

۲۳۷ـ نقطهٔ غیرمشخص A واقع بر محیط دایرهٔ O و وتر BC معلوم است از A

وتری رسم کنید که بوسیله BC نصف شود.

۲۳۸ـ کوتاه‌ترین وتری راکه ازنقطه A واقع در داخل دایره می‌گذرد رسم کنید.

۲۳۹ـ نقطهٔ A خارج دایره‌ای داده شده است. از نقطه A پاره خطهایی رسم کنید که کوچکترین و بزرگترین فاصلهٔ نقطه A ازمحیط دایره را داشته باشد.

۲۴۰ـ دایره C به مرکز O و شعاع R و نقطه A در خارج آن داده شده است از A خطی چنان رسم کنید که دایره C را در M و N قطع‌کرده و $\frac{AN}{AM}=K$ باشد (K عدد مثبت و مخالف با یك است).

۲۴۱ـ ازنقطهٔ مفروض A قاطعی چنان رسم‌کنیدکه وتر حاصل از آن در دایره مفروض C به‌وسیله وتر مفروض D′ به دوقسمت متساوی تقسیم شود.

۲۴۲ـ دو دایره C و C′ که دارای یك مرکزاند و نقطه A داده شده است. از A قاطعی رسم‌کنیدکه یکی از دودایره را در B و دیگری را در C قطع‌کند به‌قسمتی‌که BC به‌طول معیین l باشد.

۲۴۳ـ سه نقطه A و B و C داده شده‌است دایره‌ای رسم‌کنیدکه طولهای سه مماس رسم شده از A و B و C به‌ترتیب با مقدارهای l و l′ و l″ برابر باشد.

۲۴۴ـ دایره C به مرکز O و شعاع R و دونقطه A و B روی دایره داده شده است. از A و B دو وتر موازی AM و BN را چنان رسم‌کنیدکه تفاضل طولهای آن برابر مقدار معلوم 2l باشد.

۲۴۵ـ نقطه A و خط D داده شده است، دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم‌کنید که بر A بگذرد و بر روی D وتری به‌طول معلوم 2l جدا کند.

۲۴۶ـ دو نقطه A و B و خط Δ داده شده است دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو نقطه A و B بگذرد و بر خط Δ مماس باشد.

۲۴۷ـ در دایره معلوم به‌مرکز O و شعاع R، قطر MN را چنان رسم‌کنید که از نقطه معلوم A به زاویه‌معیین α دیده شود.

۲۴۸ـ دو دایره متخارج (O و R′) و (O′ و R″) و (O″ و R″) ونقطه A روی یکی ازآنها داده شده است دایره‌ای رسم‌کنیدکه ازنقطه A بگذرد و بر دو دایره مفروض مماس باشد.

۲۴۹ـ دایره C به‌مرکز O و شعاع R داده شده است. براین دایره دومماس چنان رسم‌کنیدکه با یکدیگر زاویه α تشکیل داده و وتر D کـه نقطه‌های تماس را به‌هم وصل می‌کند از نقطه معلوم P بگذرد.

۲۵۰ـ دونقطه A و B و دایره مفروض (O) داده شده است دایره‌ای رسم‌کنید بر A و B بگذرد و بر دایره (O) مماس باشد.

۲۵۱ـ خط راست D و دایره (R و O) غیر متقاطع با آن و نقطه A روی دایره داده شده، دایره‌ای رسم کنید که بر نقطه A بگذرد و بر دایره و خط D مماس باشد.

۲۵۲ـ از قطعه خط AB دایره‌ای چنان مرور دهید که دایرهٔ مفروضی را در وتری موازی با امتداد مفروض Δ قطع کند.

۲۵۳ـ در دایره‌ای دوشعاع OA و OB رسم شده‌اند. وتری رسم کنید که بوسیله این دوشعاع به سه قسمت برابر تقسیم شود.

۲۵۴ـ چهار نقطه A و B و C و D مفروض‌اند. از A و B دایره‌ای مرور دهید که اگر از C و D دومماس بر آن رسم کنیم مماسها برابر باشند.

۲۵۵ـ دایرهٔ O و دو نقطه B و A مفروض‌اند از نقطهٔ A وتری چنان رسم کنید که دوانتهایش از B به یك فاصله باشد.

۲۵۶ـ بر امتداد قطر معلوم AB از دایره‌ای، نقطهٔ P را چنان معیین کنید که اگر PC مماس وارد از آن بر دایره باشد طول PC مساوی دوبرابر PA شود.

۲۵۷ـ از نقطهٔ P واقع در داخل دایره‌ای یك وتر رسم کنید که در نقطهٔ P به دوقطعه خط چنان تقسیم شود که نسبت آنها مساوی $\frac{m}{n}$ باشد.

۲۵۸ـ دودایرهٔ O و O' مفروض‌اند، قاطعی چنان رسم کنید که در دو دایره دو وتر بطول L و L' جدا کند.

۲۵۹ـ از نقطهٔ A محل تلاقی دو دایره O و O' قاطعی رسم کنید که دو دایره را در نقطه‌های B و C قطع کند بطوریکه $CB = L$ باشد.

۲۶۰ـ دایره‌ای به مرکز O ونقطهٔ A خارج از آن مفروض است از نقطهٔ A قاطع ABC را چنان مرور دهید که دایرهٔ به قطر BC بر خط AO مماس باشد.

۲۶۱ـ دایره (R و E) و خط d مفروضند بر نقطه M خطی بگذرانید که دایره و خط d را قطع کند و در نقطه M بـه نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود.

۲۶۲ـ وتری بطول معلوم l رسم کنید که در دایره مفروض (O) بوده و وسط این وتر روی دایره مفروضی باشد.

۲۶۳ـ دو دایرهٔ متقاطع مفروض‌اند. از یکی از نقطه‌های تقاطع قاطعی رسم کنید که در این نقطه نصف شود.

۲۶۴ـ وتر AB را دردایره رسم کرده و از نقطه غیرمشخص M واقع برمحیط دایرهٔ O وتری چنان رسم کنید که به‌وسیله AB به‌دوقسمت متساوی تقسیم شود.

۲۶۵ـ از نقطه A، نقطه تقاطع دودایره قاطعی چنان رسم کنید که نسبت وترهائی که

در دو دایره ایجاد شود برابر $\frac{p}{q}$ باشد.

۲۶۶– در دایره مفروض (R و O) وتری به طول معیین l رسم کنید بطوریکه اولا برخط مفروضی عمود باشد. ثانیاً با خط مفروضی زاویه‌ای مساوی α تشکیل دهد.

۲۶۷– نقطه M را چنان بیابید که از آن سه دایره مفروض به مرکزهای O و O' و O'' و شعاعهای R و R' و R'' به زاویه‌های مساوی دیده شوند.

۲۶۸– دایره C و دونقطه A و B واقع بر آن مفروض است بر این دایره نقطه M را چنان معیین کنید که مجموع فاصله‌های M از A و B برابر طول معیین l باشد.

۲۶۹– مثلث ABC داده شده است سه دایره دو به‌دو مماس خارج چنان رسم کنید که مرکز هر یك از آنها یك رأس مثلث باشد، درحالتی که دو دایره از این سه‌دایره مماس خارج باشند نیز آنها را رسم کنید.

۲۷۰– دوخط D و D' داده شده است دایره‌ای به شعاع معلوم R چنان رسم کنید که روی این دو خط دو وتر به طولهای l و l' جدا کنند.

۲۷۱– بر روی دایره مفروض (O) نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش ازخط Δ دو برابر فاصله‌اش از خط d باشد.

۲۷۲– دو دایره O و O' و نقطهٔ P مفروض‌اند. از P قاطعی نسبت به دو دایره چنان رسم کنید که وترهای AB و $A'B'$ برابر باشند.

۲۷۳– قطر EF ازدایرهٔ O و دونقطهٔ A و B برمحیط دایرهٔ مفروض‌اند نقطهٔ C را روی محیط دایره چنان تعیین کنید که خطهای CA و CB ازقطر EF قطعه خطی به طول L جدا کنند.

۲۷۴– قطر EF از دایرهٔ O و دونقطهٔ A و B برمحیط دایره مفروض‌اند، نقطه C را روی محیط دایره چنان تعیین کنید که خطهای CA و CB از قطر مذکور در دوطرف مرکز O دوقطعه خط متساوی جدا کنند.

۲۷۵– دودایره C و C' به‌مرکزهای O و O' و به شعاعهای R و R' ویك نقطه P واقع درخارج دو دایره داده شده است. دوشعاع متوازی OA و $O'A'$ را چنان رسم کنید که $PA = P'A'$ باشد.

۲۷۶– دایره (O) و خط Δ در خارج آن داده شده است ازنقطه P درخارج دایره خطی چنان رسم کنید که دایره را در نقطه‌های B و C قطع کرده و $BH+CK=l$ باشد (H و K پای عمودهای وارد از B و C برخط Δ می‌باشد).

۲۷۷– دو دایره به مرکزهای O و O' داده شده است در این دو دایره دوشعاع موازی چنان رسم کنید که از نقطه M واقع در خارج این دو دایره به‌زاویه‌های متساوی

دیده شوند.

۲۷۸ــ دو دایره متخارج (C) و (C') و طول معلوم l داده شده است نقطه‌ای بیابید که چون از آن نقطه دومماس بر دو دایره رسم شود مماسها بطول l باشند.

۲۷۹ــ دایره‌ای عمود بردایرهٔ مفروض (O) رسم کنید که از دونقطهٔ معلوم P و Q بگذرد.

۲۸۰ــ از نقطهٔ A دایره‌ای به شعاع R چنان رسم کنید که بر دایرهٔ معلومی عمود شود.

۲۸۱ــ از نقطهٔ مفروض A دایره‌ای رسم کنید که بر دو دایرهٔ مفروض عمود شود.

۲۸۲ــ دایره رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض عمود شود.

۲۸۳ــ دستهٔ دایرهٔ (Δ و O) مفروض است. دایره‌ای متعلق به دستگاه و مماس بر خط مفروض Δ' رسم کنید.

۲۸۴ــ دستگاه دایره‌های (Δ و O) مفروض است. دایره‌ای متعلق به‌دستگاه ومماس بر دایرهٔ مفروض (C) رسم کنید.

۲۸۵ــ مثلث ABCمفروض است. دایره‌ای رسم کنید که اگر از AوBوC سه‌مماس بر آن رسم کنیم به‌ترتیب برابر با BC و CA و AB باشد.

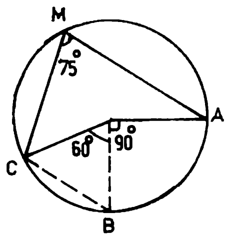
۲۸۶ــ دایره‌ای رسم کنید که بر یك خط و دایرهٔ مفروض مماس شود و از نقطهٔ معیینی بگذرد.

فصل سوم

حل مسئله‌های: خط، زاویه، نقطه

۱ــ می‌دانیم که:

$$۷۵^\circ = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = \frac{۹۰^\circ + ۶۰}{۲}$$

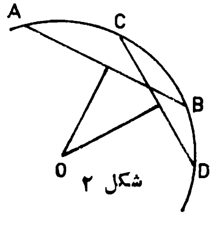


شکل ۱

پس دایره‌ای اختیاری رسم‌کرده وتر BC را برابر شعاع دایره و شعاع OA را عمود بر شعاع OB رسم می‌کنیم. چون مثلث OCB متساوی‌الاضلاع است.

$\widehat{COA} = ۱۵۰^\circ$ و لذا $\widehat{COB} = ۶۰^\circ$

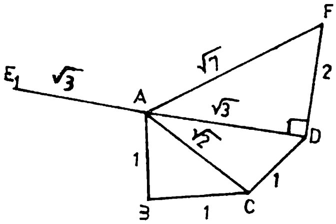
بنابراین از هرنقطهٔ اختیاری M واقع برکمان AC از دایره راکه شامل نقطه B نباشد بـه نقطه‌های A و C وصل‌کنیم زاویهٔ AMC مساوی ۷۵° درجه خواهد شد. (ش ۱)



شکل ۲

۲ــ دو وتر درکمان رسم می‌کنیم، محل تلاقی عمود منصف‌های ایـن دو وتـر مـرکز دایـره است. (ش ۲)

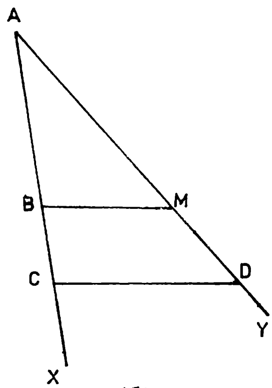
۳ـ AB را برابر یك رسم کرده و BC را نیز برابر یك بر آن عمود می‌کنیم، AC برابر $\sqrt{۲}$ است. DC را برابر یك بر AC عمود می‌کنیم. AD برابر $\sqrt{۳}$ است و DA را مساوی $AE=AC$ امتداد می‌دهیم. DE برابر $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ می‌شود، DF را برابر ۲ بر AD عمود می‌کنیم AF را برابر $\sqrt{۷}$ خواهد بود. (ش ۳)



شکل ۳

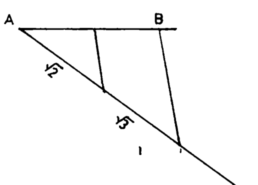
۴ـ رابطه مسئله را به صورت $\frac{x}{d}=\frac{a}{a+b}$ می‌نویسیم ازنقطه A دونیم خط AX و AY را رسم می‌کنیم $AB=a$ $BC=b$ را روی AX (ش ۴) و $AD=d$ را روی AY جدا کرده و نقطه C را به‌نقطه D وصل می‌کنیم و از نقطه B خطی به موازات CD رسم کرده تا AY را درنقطه M قطع کند. $AM=X$ می‌باشد زیرا از تشابه دو مثلث ABM و ACD نتیجه می‌شود $\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AD}$ یا

$$\frac{a}{a+b}=\frac{AM}{d}$$

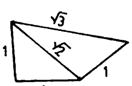


شکل ۴

۵ـ ابتدا پاره‌خطهایی برابر $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ رسم می‌کنیم و سپس خط مفروض را بـه نسبت دوپاره‌خط $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ تقسیم می‌کنیم. (ش ۵ الف و ش ۵ ب).



شکل ۵ ب

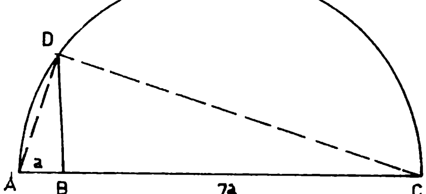


شکل ۵ الف

۶ـ اگر x طول قطعه خط مطلوب باشد به‌فرض داریم

$$x^{۲}=۷a^{۲}=۷a\times a$$

بنابراین قطعه خط مطلوب‌واسطه هندسی است مابین دوقطعه خط به‌طولهای a و ۷a ازآنجا ترسیم زیر نتیجه می‌شود:



شکل ۶

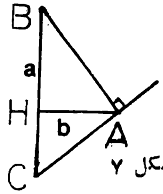
روی خطی دوقطعه خط متوالی $AB=a$ و $BC=7a$ را رسم کرده و نیمدایره‌ای به‌قطر AC رسم می‌کنیم تا عمود مرسوم از B بـر AC را در نقطهٔ D قطع کند DB قطعه خط مطلوب است زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ADC داریم: (ش ۶)

$$\overline{BD}^2=AB\times BC=7a\times a=7a^2$$

پس:

$$BD=a\sqrt{7}$$

۷ــ مثلث قائم‌الزاویه AHB قائمه در زاویه $\hat{H}$ را طوری‌رسم می‌کنیم‌که $BH=a$ و $AH=b$ باشد. از نقطه A عمودی بر AB اخراج‌کرده تا امتداد BH را درنقطه C قطع‌کند، HC برابر با x می‌باشد.زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ABC (ش ۷) داریم:



شکل ۷

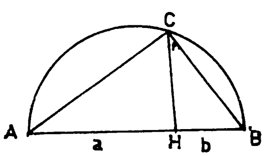
$$AH^2=BH\cdot HC$$

$$b^2=a\cdot HC\Longrightarrow HC=x$$ [1]

۸ــ واسطه توافقی بین دومقدار معلوم a و b به‌صورت $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ تعریف می‌شود که آن را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Longrightarrow x=\frac{2ab}{a+b}=\frac{(\sqrt{ab})^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

یعنی واسطه هندسی بین‌دومقدار a و b، واسطه هندسی بین واسطه حسابی. و واسطه‌توافقی آنها نیز می‌باشد. از این راه می‌توان اندازه پاره‌خط به‌طول x را بدست‌آورد[2].



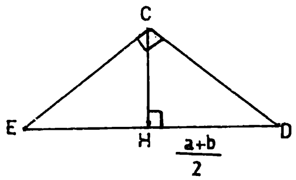
شکل ۸ الف

$$CH^2=a\cdot b\Longrightarrow a\cdot b\Longrightarrow CH=\sqrt{ab}\qquad \text{(ش ۸ الف)}$$

$$x\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)=(\sqrt{ab})^2$$

۱ــ راه‌های دیگری برای تعیین پاره‌خط x وجود داردکه از درج آنها صرف‌نظر شده است.

۲ــ دوپاره‌خط a و b بطور متوالی بـر خط Δ نقـل شده و از نقطه H عمود بـر AB اخراج گردیده تا دایره به قطر AB در C قطع کرده است.

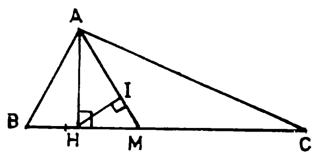


شکل ۸ ب

(ش ۸ ب)

$$CH^{۲}=EH \cdot HD \Longrightarrow (\sqrt{ab})^{۲}=EH \cdot \left(\frac{a+b}{۲}\right) \Longrightarrow EH=x$$

یادآوری- اگر مثلث ABC در زاویه A قائمه باشد و H پای ارتفاع وارد بر وتر و M وسط ضلع BC باشد، چون H را در I بر AM تصویر کنیم AM و AH و AI به‌ترتیب واسطه حسابی، واسطه هندسی و واسطه توافقی بین طولهای BH و HC می‌باشند (ش ۸ ج)



شکل ۸ ج

$$AM=\frac{BC}{۲}$$

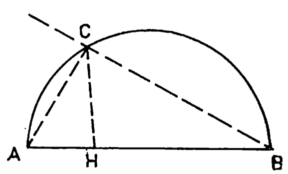
$$\frac{BH+HC}{۲}=\frac{BC}{۲}=AM \text{ و } AH^{۲}=BH \cdot HC$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHM، HI ارتفاع وارد بر وتر است.

$$AH^{۲}=AM \cdot AI \Longrightarrow AI \quad \text{واسطه توافقی}$$

۹- راه اول- می‌توان تساوی را به‌صورت $x \times a = ۱ \times ۱$ نوشت وبااستفاده از ترسیم جزء مجهول تناسب با معلوم بودن سه جزء دیگر مسئله را حل کرد.

راه دوم - نیمدایره‌ای به قطر $AB=a$ رسم کرده و به‌مرکز A و شعاع یك کمانی می‌زنیم تا محیط نیمدایره را در نقطه C قطع کند. از C به A و B وصل می‌کنیم واز C عمود CH را بر AB فرود می‌آوریم درمثلث قائم‌الزاویه ACB (ش ۹ الف) می‌توان نوشت:



شکل ۹ الف

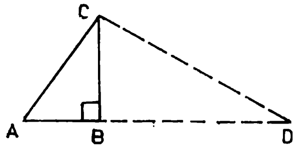
---

۱ - مثلث قائم‌الزاویه CHD با HC که قبلا بدست آمده $(CH=\sqrt{ab})$ و $DH=\frac{a+b}{۲}$ رسم شده و ازنقطه C عمودی بر CD اخراج گردید، این عمود امتداد HD را در نقطه E قطع کرده است.

$$AC^{۲}=AB\cdot AH$$

$$۱=a\cdot AH \Longrightarrow AH=\frac{۱}{a}$$

AH پاره‌خط مطلوب است.



شکل ۹ ب

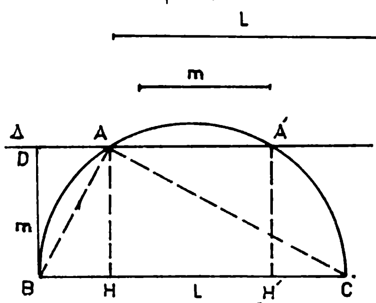
درحالتی‌که $a>۱$ باشد،ابتداء مثلث قائم‌الزاویه ABC را با معلوم بودن دوضلع $AB=a$ و $BC=۱$ رسم‌کرده و سپس از نقطه C عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در D قطع کند. (ش ۹ ب) AD پاره‌خط مطلوب است زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ACD می‌توان نوشت:

$$AB\cdot BD=BC^{۲}$$

$$a\cdot BD=۱ \Longrightarrow BD=\frac{۱}{a}$$

یادآوری–[۱] هریك از دوترسیم بالا راهی برای تعیین واسطه هندسی بین دوپاره‌خط داده شده را نشان می‌دهد.

۱۰– مجموع l و واسطه هندسی به m نشان داده شده است. پاره‌خطی به طول l رسم‌کرده و نیمدایره‌ای به‌قطر $BC=l$ می‌کشیم ازنقطه B مماس بر نیمدایره رسم‌کرده (ش ۱۰) و برروی‌آن ازنقطه B پاره‌خطی به‌اندازه طول m جدا می‌کنیم تا نقطه D بدست آید از D خط Δ را موازی BC رسم می‌کنیم از نقطه تلاقی این خط با نیمدایره عمودی بر BC فرود می‌آوریم (A نقطه تلاقی خط Δ با نیمدایره و H پای عمود) پاره‌خطهای BH و HC جوابهای مسئله می‌باشند زیرا اولا مجموع آنها l است و ثانیاً در مثلث قائم‌الزاویه BAH، AH واسطه هندسی بین BH و CH است یعنی $AH^{۲}=BD^{۲}=m^{۲}=BH\cdot HC$ است.



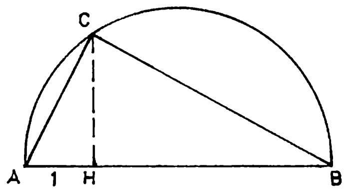
شکل ۱۰

شرط امکان مسئله آن است که Δ نیمدایره را قطع کند یا بر آن مماس باشد.

۱– برای ترسیم واسطه هندسی دوپاره‌خط مفروض می‌توان از راه رسم مماس و قاطع بر یك دایره و یا با استفاده از قوت نقطه واقع در داخل دایره استفاده‌کرد.

$m \leqslant R = \frac{l}{۲}$ درحالتی‌که $m < \frac{l}{۲}$ باشد خط Δ نیمدایره را در دونقطه A و A' قطع می‌کند و درنتیجه دودسته جواب (HC و BH) و ($H'C$ و BH') بدست می‌آید ولی به‌آسانی معلوم می‌شود که $BH' = HC$ و $H'C = BH$ است بنابراین همان پاره‌خطهای BH و HC جوابهای مسئله است و مسئله فقط یك دسته جواب دارد. درحالتی‌که $m = \frac{l}{۲}$ باشد خط Δ بر نیمدایره مماس است و در این حالت $BH = HC = \frac{l}{۲}$ است. درحالتی‌که $m > \frac{l}{۲}$ باشد Δ نیمدایره را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.

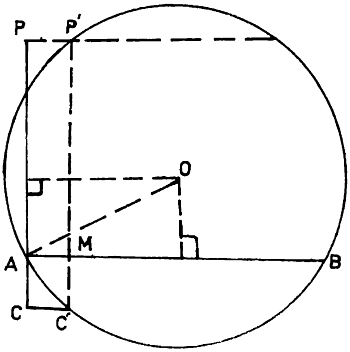
یادآوری- از ترسیم بالا معلوم می‌شود که هرگاه l مجموع دوطول، ثابت باشد حاصلضرب آنها وقتی بزرگترین مقدار خود را داردکه این دو طول با هم مساوی شوند برعکس اگر m ثابت باشد، l وقتی کمترین مقدار خود را می‌گیرد که دوطول با هم مساوی باشند.



شکل ۱۱

۱۱- به قطر AB نیمدایره‌ای رسم کرده و AH را به‌اندازه یك واحد در روی آن جدا می‌کنیم از H عمودی بر AB اخراج می‌کنیم (ش ۱۱) تا نیمدایره را درنقطه C قطع کند. AC پاره‌خط مطلوب است زیرا:

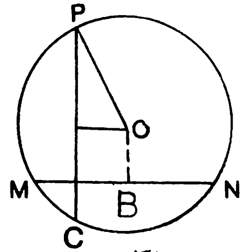
$$\overset{\Delta}{ACB} \quad AC^{۲} = AB \times AH$$
$$AC^{۲} = a \times ۱ = a \Longrightarrow AC = \sqrt{a}$$



شکل ۱۲

۱۲- دوخط عمود برهم رسم کرده و از رأس زاویه قائمه بر یکی AB مساوی مجموع دوپاره‌خط و بر دیگری AC را مساوی یك واحد و $AP = P$ حاصلضرب دوپاره‌خط در دوطرف نقطه A جدا می‌کنیم. عمود منصف‌های AB و PC یکدیگر را در O قطع می‌کنند دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع OA رسم می‌کنیم از P خط PP' را موازی با AB می‌کشیم تا دایره را در P' قطع کند عمود $P'C'$ را بر AB فرودآورده تا آن را درنقطه M تلاقی کند MA و MB پاره‌خطهای مطلوب می‌باشند (ش ۱۲) زیرا:

$MA+MB=AB$ و $MA \cdot MB=MP' \cdot MC'=AP \cdot AC=P\times ۱=P$



شکل ۱۳

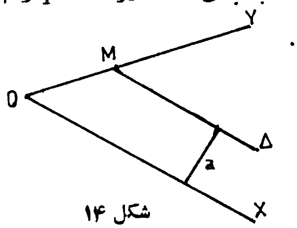
۱۳ــ دوخط برهم عمود می‌کنیم و بر یکی AB را مساوی تفاضل دوپاره‌خط و بر دیگری AC را مساوی یك واحد و AP را مساوی P حاصلضرب دوپاره‌خط در دوطرف نقطه A جدا می‌کنیم. عمود منصفهای AB و PC یکدیگر را درنقطه O تلاقی می‌کنند (ش۱۳)

دایره‌ای‌که به مرکز O و شعاع OP رسم شود AB را دو نقطه M و N قطع می‌کند، AN و MA پاره‌خطهای مطلوب می‌باشند زیرا:

$$AN-MA=AN-BN=AB.$$

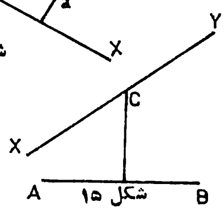
$$MA \cdot AN=AC \cdot AP=۱\times P=P$$

تبصره- اگر حاصلضرب دوپاره بصورت $m \cdot n$ باشد به‌جای‌آنکه دوقطعه P و ۱ را جداکنیم می‌توان دوطول بداندازه‌های m و n جداکرد.



شکل ۱۴

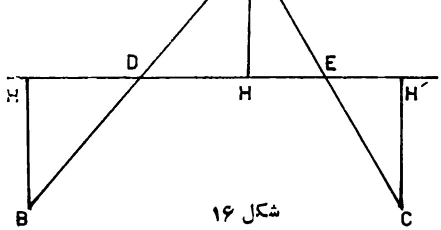
۱۴ــ خط Δ را بدفاصله a از ox رسم‌می‌کنیم تا oy را در M قطع‌کند، M جواب مسئله است. (ش ۱۴)



شکل ۱۵

۱۵ــ نقطه C محل برخورد عمود منصف AB با xy جواب مسئله است و اگر دونقطهٔ A و B بر xy واقع باشند وسط AB جواب مسئله خواهد بود. (ش ۱۵)

۱۶ــ نقطه‌های A و B و C را به‌هم وصل می‌کنیم درمثلث ABC خطی‌که وسطهای ضلعهای AB و AC را به‌هم وصل می‌کند (خط DE) جواب مسئله می‌باشد زیرا از تساوی دومثلث قائم‌الزاویه AHE و CH'E (درحالت وتر AE=FC و یك‌زاویه حاده $\widehat{AEH}=\widehat{CEH'}$) نتیجه می‌شود:



شکل ۱۶

$$AH=CH' \quad (۱)$$

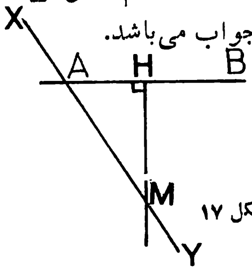
و نیز از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه AHD و BH''D نتیجه می‌شود: (ش ۱۶)

$$AH=BH'' \quad (۲)$$

از مقایسه تساویهای (۱) و (۲) داریم:

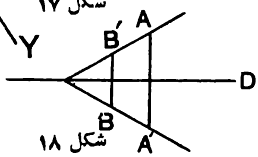
$$AH=CH'=BH''$$

همچنین‌خطهایی که وسطهای AC و BC و یا وسطهای AB و BC را به‌هم وصل می‌کند جواب مسئله می‌باشند. بنا بر این مسئله در حالت‌کلی دارای سه جواب می‌باشد.



شکل ۱۷

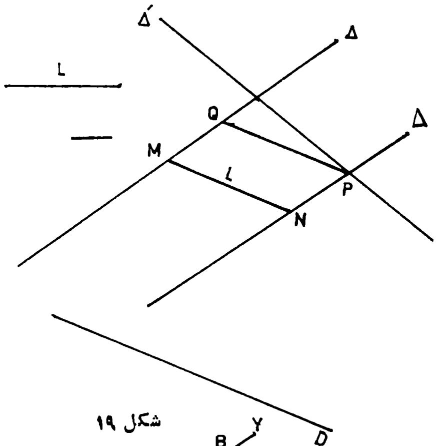
۱۷ـ محل برخورد عمود منصف AB با xy جواب مسئله است حالت خاص: (ش ۱۷)
اگر HM موازی yx باشد مسئله جواب ندارد.



شکل ۱۸

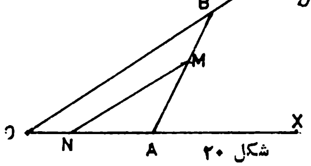
۱۹ قرینه‌های دونقطه A و B را نسبت به D پیدا می‌کنیم $A'B$ و AB' جوابهای مسئله است. (ش ۱۸)

۱۹ـ دوخط Δ و Δ' داده شده‌اند قطعه خطی به‌طول l که موازی با امتداد مفروض D است باید بر این دوخط متکی شود.



شکل ۱۹

از نقطه دلخواه M واقع بر Δ بردار MN را همسنگ بردار l رسم می‌کنیم از نقطه N انتهای بردار خط Δ_1 را موازی Δ می‌کشیم تا Δ' را در P قطع کند. از نقطه P خطی موازی NM رسم می‌کنیم تا Δ' را در Q قطع کند. (ش ۱۹) چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است و لذا QP پاره‌خط مطلوب است. اگر پاره‌خط l بصورت بردار داده شده‌باشد (جهت معیین داشته باشد) مسئله یك‌جواب و درغیر اینصورت دوجواب‌دارد.



شکل ۲۰

۲۰ـ اگر مسئله‌حل‌شده‌باشدو AMB پاره‌خط مطلوب فرض‌شود. باید $AM = ۲BM$ باشد اگراز M خطی موازی oy رسم شودکه ox را در N قطع‌کند می‌توان نوشت:

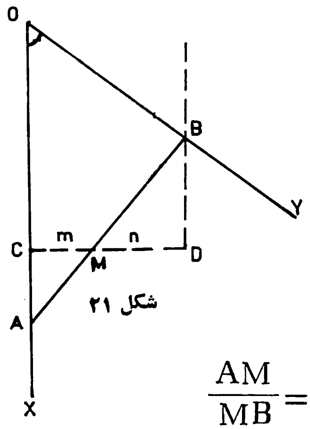
$$\frac{AN}{NO}=\frac{AM}{MB}=۲$$

یا $AN = ۲ON$ بنابراین می‌توان ترسیم زیر را انجام داد. (ش ۲۰)

ازنقطه M خطی موازی oy رسم می‌کنیم تا ox را در N قطع‌کند در امتداد ON پاره‌خط AN را مساوی با ۲ON جدا می‌کنیم از A به M وصل‌کرده و امتداد می‌دهیم

تا oy را در نقطه B قطع کند AMB پاره‌خط مطلوب است.

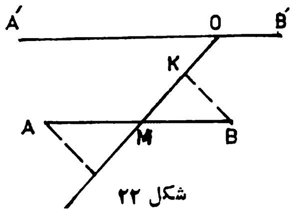
۲۱ـ از نقطه M خطی رسم می‌کنیم تا ox را در نقطه C قطع کند MC را به m قسمت متساوی تقسیم کرده و آنرا ازطرف M امتداد داده و بر روی ایـن امتداد n قسمت متساوی جدا مـی‌کنیم از نقطه D انتهای پاره‌خط پدید آمده خطی موازی باضلع ox می‌کشیم تا oy را در نقطه B قطع کند از B به M وصل کرده و امتداد می‌دهیم تـا ضلع ox را در A قطع کند. (ش ۲۱)



شکل ۲۱

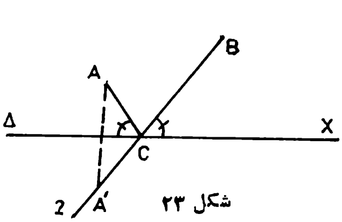
$$\frac{AM}{MB}=\frac{CM}{MD}=\frac{m}{n}$$

۲۲ـ خط $A'B'$ که از نقطه O بموازات AB رسم شود یك جواب مسئله است و در این‌حالت A و B دریك‌طرف این خط واقع‌اند. اگر OM جواب دیگر مسئله باشد. (A و B در دوطـرف خط OM واقع‌اند) یعنی عمودهای AH و BK که از نقطه‌های A و B بر OM فرود می‌آیند متساوی باشند از تساوی دو مثلـث قائم‌الـزاویـه MKB و MHA نتیجه مـی‌شود $AM=MB$ پس جواب دوم مسئله خطی است کـه نقطهٔ O را بوسط AB وصل می‌کند. (ش ۲۲)

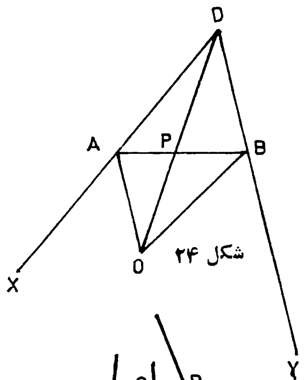


شکل ۲۲

۲۳ـ اگر C نقطه مطلوب باشد $\widehat{AC\Delta}=\widehat{BCx}$، CZ امتداد CB با Δ زاویه $\widehat{\Delta CZ}$ را می‌سازدکه برابر با $\widehat{AC\Delta}$ است(ش۲۳) لذا دو خط AC و CZ قـرینه یکدیگـر نسبت بـه‌خط Δ می‌باشند و بنا براین می‌توان مسئله را را به طریق زیر حل کرد. قرینه نقطه A (یا B) را نسبت به Δ تعیین کرده و آن را به B (یا A) وصل می‌کنیم محل تـلاقی این خط با Δ نقطه C می‌باشد.

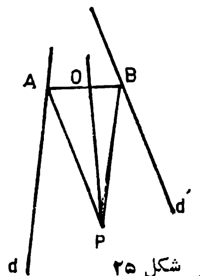


شکل ۲۳



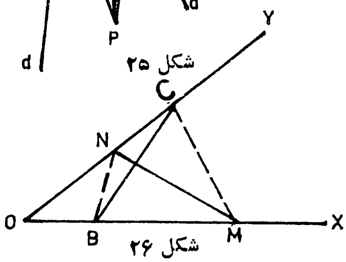
شکل ۲۴

۲۴ــ P را به O وصل می‌کنیم. OP را تا O' به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم. از O' خطی بموازات oy و خط دیگری به موازات ox رسم می‌کنیم تا ضلعهای زاویه را در A و B قطع کند APB جواب مسئله است. (ش ۲۴)



شکل ۲۵

۲۵ــ از P خطی بموازات d' رسم می‌کنیم تا d را در A قطع کند وخط دیگری بموازات d رسم می‌کنیم تا d' را در B قطع کند چون قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگراند، اگر P را به‌وسط AB وصل کنیم، PO از محل تلاقی دو خط d و d' خواهد گذشت. (ش ۲۵)

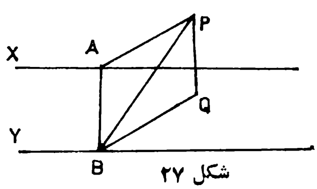


شکل ۲۶

۲۶ــ B را به C وصل می‌کنیم عمود منصف ضلع BC در ox، M و oy را در N قطع می‌کند . این نقطه‌ها جواب مسئله می‌باشند. (ش ۲۶)

۲۷ــ فرض می‌کنیم، مسئله حل شده باشد: از P پاره‌خط PQ را همسنگ AB رسم می‌کنیم چهارضلعی $PABQ$ متوازی‌الاضلاع است به‌فرض $\frac{m}{n}=\frac{PA}{PB}$ داریم: $\frac{m}{n}=\frac{QB}{PB}$ و از اینجا راه حل مسئله بدست می‌آید.

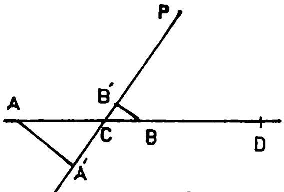
از P خط PQ را بر دوخط متوازی عمود می‌کنیم و طول آنرا برابر با فاصلهٔ آن دوخط اختیار می‌نمائیم و مکان نقطه‌هایی راکه نسبت فاصله‌های آنها از دونقطهٔ P و Q برابر $\frac{m}{n}$ باشد (یك دایره است)[1] رسم می‌کنیم تاخط y را در B قطع کند ازاین نقطه AB را عمود بر خطهای متوازی رسم می‌کنیم. (ش ۲۷)



شکل ۲۷

۱ــ چنانکه در ضمن مسئله‌های مربوط به ترسیم مثلث (مسئله ۱۴۲ آمده است) این مکان دایره‌ای است که دو انتهای قطرآن نقطه‌های C و D مزدوجهای توافقی P و Q با نسبت $\frac{m}{n}$ می‌باشد.

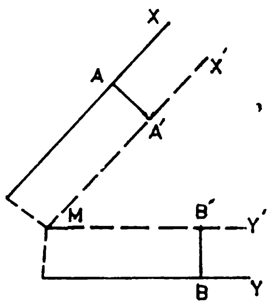
۲۸ــ یك خط اختیاری‌را درنظر می‌گیریم که از P گذشته و AB را در C قطع کند و فرض می‌کنیم AA' و BB' فاصله‌های A و B از آن‌خط باشند دراین‌صورت چون AA' با BB' موازی‌است داریم: $\frac{AA'}{BB'}=\frac{CA}{CB}$



شکل ۲۸

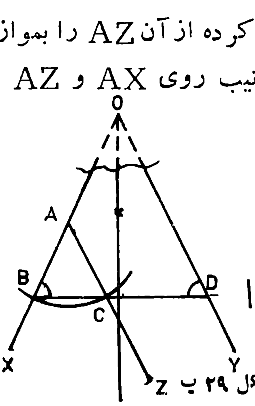
بنابراین برای آنکه $\frac{AA'}{BB'}$ مساوی $\frac{m}{n}$ باشد لازم و کافی است که $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ باشد. از اینجا معلوم می‌شودکه مسئله دوجواب دارد و برای تعیین آنها کافی است P را به دونقطه C و D از خط AB که قطعه خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کندوصل کنیم.(ش۲۸)

۲۹ــ راه اول: می‌دانیم که نیمساز زاویه مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دوضلع زاویه به‌یك فاصله باشند پس از دونقطه اختیاری A و B واقع بر ضلعهای زاویه دوعمود بر این ضلعها اخراج‌کرده طولهای AA' و BB' را مساوی یکدیگر مطابق شکل بر این دوعمود جدا می‌کنیم و از A' و B' دوخط x' و y' را بموازات خطهای X و y ضلعهای زاویه رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M که متساوی‌الفاصله از ضلعها است قطع کنند. به‌همین‌ترتیب نقطه دیگری نیز مانند M' بدست می‌آوریم که بر نیمساز واقع باشد خط MM' جواب مسئله است. (ش ۲۹ الف)



شکل ۲۹ الف

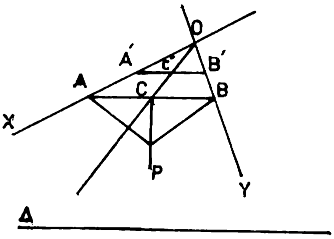
راه دوم: روی ضلع X نقطه دلخواهی‌مانند A اختیارکرده از آن AZ را بموازات y رسم می‌کنیم و دو طول متساوی AB و AC را به‌ترتیب روی AX و AZ جدا می‌کنیم مثلث ABC متساوی‌الساقین است و داریم: $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ و چون AZ با y موازی است داریم $\widehat{ACB}=\hat{D}$ پس $\widehat{ABC}=\hat{D}$ حال اگر عمود منصف قطعه خط BD را رسم‌کنیم این‌خط جواب مسئله است. (ش ۲۹ ب) درواقع اگر رأس زاویه را O



شکل ۲۹ ب

فرض کنیم مثلث OBD متساوی‌الساقین و عمود منصف قاعدهٔ آن نیمساز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد.

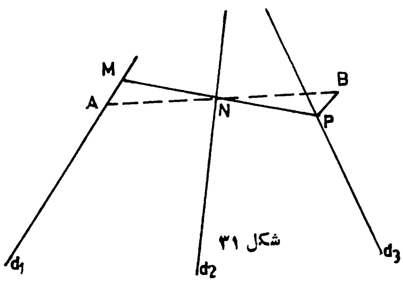
۳۰– فرض کنیم مسئله حل شده باشد. AB موازی Δ بود و $PA=PB$ باشد. اگر C وسط AB باشد PC بر AB و Δ عمود خواهد بود. بنابراین راه‌حل مسئله چنین است.



شکل ۳۰

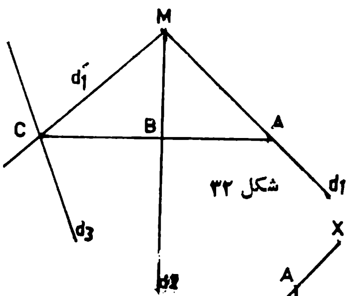
$A'B'$ را بموازات Δ رسم می‌کنیم و نقطه O محل تقاطع خطهای X و y را به C' وسط $A'B'$ وصل می‌کنیم، از P عمودی بر Δ رسم می‌کنیم تا OC' را در C قطع کند. از C خط AB را بموازات Δ می‌کشیم، AB جواب مسئله است. (ش ۳۰)

۳۱– یك نقطه مانند A روی d_1 فرض می‌کنیم و خط دلخواهی می‌کشیم تا d_2 را قطع کند آنرا به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا B بدست آید. از B بموازات d_1 رسم می‌کنیم تا d_3 را در P قطع کند P را به N وصل کرده امتداد می‌دهیم تا d_1 را در M قطع کند چنین خطی جواب مسئله است بنابراین می‌توان با تغییر نقطهٔ A جوابهایی متعدد بدست آورد و مسئله دارای بینهایت جواب است. (ش ۳۱)



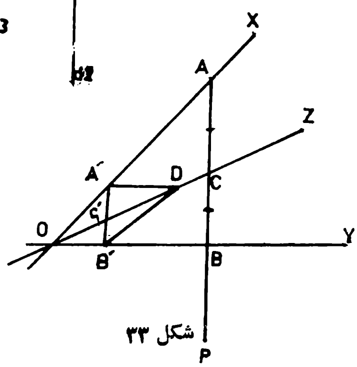
شکل ۳۱

۳۲– قرینه خط d_1 را نسبت به d_2 پیدا کرده آنرا d_1' می‌نامیم محل برخورد d_1' با d_3 را نقطه C نامیده و از C عمودی بر d_2 فرود آورده، پای آنرا B می‌نامیم. CB را امتداد داده تا d_1 را در A قطع کند خط ABC جواب مسئله است زیرا قرینه نقطه A نسبت به خط d_2 نقطه C می‌باشد پس لازم می‌آید که $AB=BC$ باشد. (ش ۳۲)



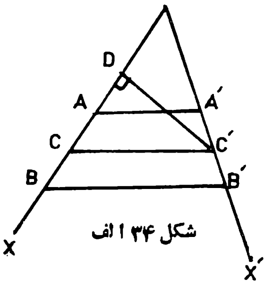
شکل ۳۲

۳۳– PBCA را خط مطلوب فرض می‌کنیم. اگر خط اختیاری $A'C'B'$ را بموازات این قاطع رسم کنیم داریم: $\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$ و چون $AC=CB$ است پس $A'C'=C'B'$ خواهد بود بنابراین اگر OC' را به طول $C'D$



شکل ۳۳

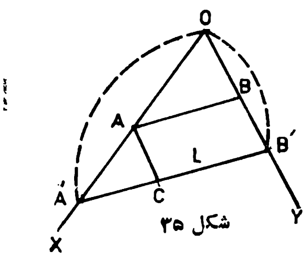
ومساوی با OC' امتداددهیم شکل $OA'DB'$ که قطرهایش منصف یکدیگرند متوازی‌الاضلاع می‌شود و (ش ۳۳) بنابراین: از نقطهٔ اختیاری D واقع بر OZ خطهای DA' و DB' را به‌ترتیب موازی با Y و X رسم و $B'A'$ را وصل می‌کنیم. خطی که از P موازی با $A'B'$ رسم شود جواب مسئله است



شکل ۳۴ الف

۳۴ــ فرض کنیم مسئله حل شده و C و C' به‌ترتیب وسطهای AB و $B'B'$ وخط $C'D$ عمود مرسوم از C' بر X باشد. مساحت[1] هر ذوزنقه مساوی با حاصل‌ضرب طول یك‌ساق در فاصلهٔ وسط ساق مقابل از آن می‌باشد $AB\times C'D=m^2$ و از آنجا $C'D=\frac{m^2}{AB}$ پس برای حل مسئله کافی است طول $C'D$ را جداگانه رسم کرده خطی موازی با X ر به‌فاصلهٔ $C'D$ از آن رسم کنیم تا خط X' را در C' قطع کند. سپس CC' را وصل کرده AA' و BB' را بموازات آن رسم کنیم- مسئله دوجواب دارد زیرا دو خط موازی با X و به‌فاصلهٔ $\frac{m^2}{AB}$ از آن‌وجود دارد. (ش ۳۴ الف)

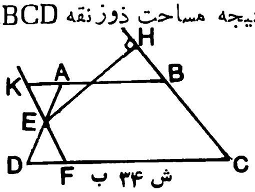
۳۵ــ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم: $AB=L$ و $\frac{OA}{OB}=\frac{m}{n}$ باشد حال روی ox طول $O'A=m$ وروی oy طول $OB'=n$ را جدا می‌کنیم و $A'B'$ را وصل کرده AC را موازی oy رسم می‌کنیم بنابراین: $\frac{OA'}{OB'}=\frac{OA}{OB}$ و AB با $A'B'$ موازی است و چون $B'C=BA=L$ می‌باشد



شکل ۳۵

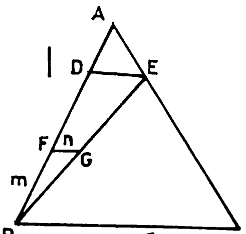
---

۱ ــ در ذوزنقه $ABCD$، نقطه E وسط ساق AD و $BC\perp EH$ است. از نقطه E خط EF را موازی BC رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه K قطع کند دو مثلث BEF و AEK به‌حالت دوزاویه و ضلع بین آنها با یکدیگر مساویند در نتیجه مساحت ذوزنقه $ABCD$ با مساحت متوازی‌الاضلاع $KBCF$ برابر می‌شود اما مساحت متوازی‌الاضلاع $KBCF$ برابر $BC\times EH$ است. لذا مساحت ذوزنقه مساوی با $BC\times EH$ می‌باشد. (ش ۳۴ ب)



ش ۳۴ ب

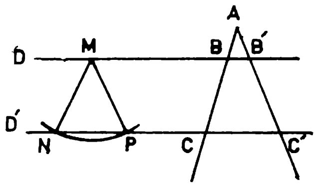
بنا براین: طولهای OA' و OB' را به‌ترتیب مساوی m و n جداکرده بر $B'A'$ طول $B'C=L$ را جدا می‌کنیم و از C خطی بموازات oy رسم می‌کنیم تا ox را در نقطه A قطع‌کند و AB را موازی $A'B'$ رسم می‌کنیم. AB جواب مسئله است. (ش ۳۵)



شکل ۳۶

۳۶ـ روی ضلع AB قطعه خط BF را برابر m جدا می‌کنیم و از F خطی بموازات BC می‌کشیم روی این خط، FG را برابر n جدا می‌کنیم. BG ضلع AC را در E قطع‌می‌کند از E خط ED را بموازات BC می‌کشیم و خواهیم‌داشت: (ش ۳۶)

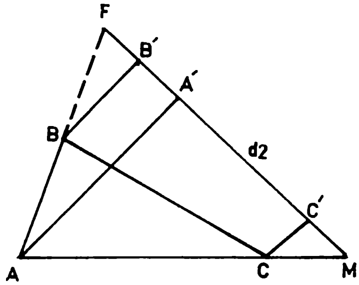
$$\frac{BD}{DE}=\frac{BF}{FG}=\frac{m}{n}$$



شکل ۳۷

۳۷ـ نقطه M را روی خط اختیار مـی‌کنیم به‌مرکز M و شعاع L دایره رسم می‌کنیم‌که خط D' را در نقطه‌های N و P قطع‌کند، از A خطهـای ABC و $AB'C'$ را بموازات MN و MP رسم می‌کنیم‌که جوابهای مسئله می‌باشد اگر L بزرگتر از فاصلهٔ دوخط D و D' بـاشد مسئله دوجواب دارد و اگـر با آن برابر باشد مسئله یك جـواب دارد و اگر l کـوچکتر از فاصلهٔ دوخط باشد،مسئله جواب نخواهد داشت. (ش۳۷)

۳۸ـ اگر d خط مطلوب باشد پس رابطه‌های $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ و $\frac{BB'}{CC'}=\frac{n}{r}$ برقرار است ایـن دو رابطه را درهم ضرب کـرده نتیجه می‌شود: $\frac{AA'}{CC'}=\frac{m}{r}$ خطهای AC و AB را امتداد می‌دهیم تا به‌ترتیب d را در M و F قطع کنند در مثلثهای MAA' و FAA' به‌ترتیب داریم:



شکل ۳۸

$$\frac{AA'}{CC'}=\frac{MA}{CM}=\frac{m}{r} \quad (۱)$$

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{AF}{BF}=\frac{m}{n} \quad (۲)$$

رابطه‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهندکه برای حل مسئله کافیست در امتداد AC و AB به‌ترتیب نقطه‌های M و F را چنان پیداکنیم‌که رابطه‌های

$$\frac{AE}{BF}=\frac{m}{n}$$

$$\frac{AM}{CM}=\frac{m}{r}$$

برقرار باشند

رابطه‌های

$$\frac{AF}{BF}=\frac{m}{n}$$

و

$$\frac{AM}{CM}=\frac{m}{r}$$

را می‌توان به‌ترتیب به‌صورت

$$\frac{AF-BF}{BF}=\frac{m-n}{n}$$

$$\frac{AM-CM}{CM}=\frac{m-r}{r}$$

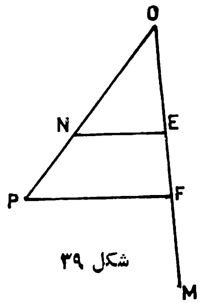
و یا

$$\frac{AB}{BF}=\frac{m-n}{n}$$

و

$$\frac{AC}{CM}=\frac{m-r}{r}$$

اندازه‌های BE و CM را کـه چهارمین جـزء تناسب می‌باشند از طـریق ترسیم می‌توان بدست‌آورد بدین‌ترتیب نقطه‌های M و F مشخص شده سپس M را به F وصل کرده خط‌حاصل خط (d) می‌باشد. (ش ۳۸)

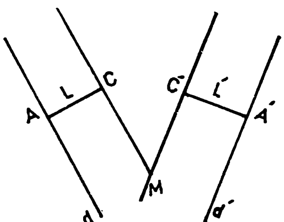


شکل ۳۹

۳۹ـ فرض می‌کنیم خط OM جواب مسئله باشد پس رابطه‌ی $\frac{PF}{NE}=h$ (۱) برقرار است و ME و NP را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در O قطع کنند در مثلث OPF خط NE با PF موازی است پس می‌توان نوشت:

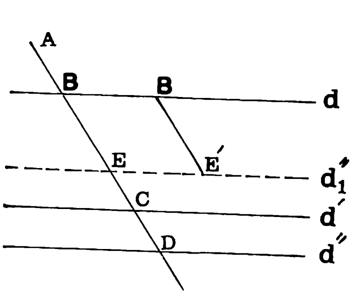
$$\frac{PF}{NE}=\frac{PO}{NO}=h \quad (۱)$$

لذا برای حل مسئله کافیست در روی پاره‌خط NP یا در امتداد NP نقطه‌ای مانند O را چنان پیدا کنیم که: $\frac{OP}{ON}=h$ باشد سپس از O به نقطه M وصل می‌کنیم تا خط ME بدست آید برحسب آنکه نقطه O را بین دو نقطه P و N و خارج P و N اختیار کنیم مسئله دارای دوجواب خواهد بود. (ش ۳۹)



شکل ۴۰

۴۰ـ نقطه‌ای مانند A' روی d' درنظر گرفته و عمودی بر آن اخراج می‌کنیم در روی این عمود $A'C' = L'$ را جدا کرده و از C' خطی بموازات d' رسم می‌کنیم روی d نقطه A را درنظر گرفته وعمودی بر آن اخراج می‌کنیم و روی آن $AC = L$ را جدا نموده و از C خطی بموازات d رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط یعنی نقطه M جواب مسئله است. (ش ۴۰)



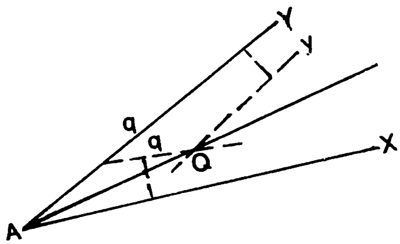
شکل ۴۱

۴۱ـ اگر d_1'' قرینه d'' نسبت به d باشد، می‌توان نوشت:

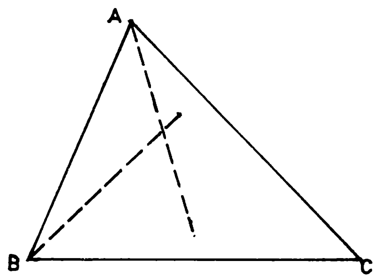
$EC = CD$ و $BC - EC = l$

بنابراین $B'E'$ را به‌طول l بین دوخط‌متوازی d و d_1'' محصور می‌کنیم (این ترسیم درمسئلهٔ ۳۷ آمده است) و از نقطه A خطی موازی با $B'E'$ می‌کشیم تا نقطه‌های B و C و D بدست آید

۴۲ـ ابتداء مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که نسبت فاصله‌های آنها از دو ضلع یك زاویه برابر مقدار مشخص $\frac{p}{q}$ باشد.[1] خطی موازی Ax و به فاصله p و خطی موازی Ay و به فاصله q از آن رسم می‌کنیم، AO مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت آنها از دوضلع زاویه $\frac{p}{q}$ می‌باشد. حال مکان هندسی نقطه‌هایی را که از ضلعهای AB و AC برابر $\frac{p}{q}$ واز ضلعهای AB و BC برابر $\frac{p}{r}$ باشد بدست آورده محل تلاقی این دوخط نقطه مطلوب است. (شکلهای ۴۲ الف و ب)

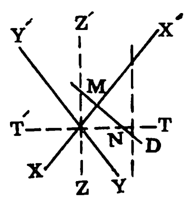


شکل ۴۲ الف



شکل ۴۲ ب

۴۳ـ چون هر نقطه متساوی‌الفاصله از دوخط متقاطع روی نیمساز یکی از زاویه‌های آن‌دوخط واقع‌است بنا بر این نقطهٔ مطلوب در محل تقاطع خط مفروض (D) با این نیمسازها قراردارد. و چون زاویه‌های دوخط متقاطع دارای‌دوخط نیمساز عمود بر یکدیگر می‌باشد مسئله‌عموماً دارای‌دوجواب‌است‌و درحالتی‌که خط (D) با یکی از دونیمساز موازی باشد مسئله فقط دارای یك جواب خواهد بود.



شکل ۴۳

و اگر خط D نیمساز یکی از زاویه‌های دوخط باشد تمام نقطه‌های آن خط جواب مسئله است. (ش ۴۳)

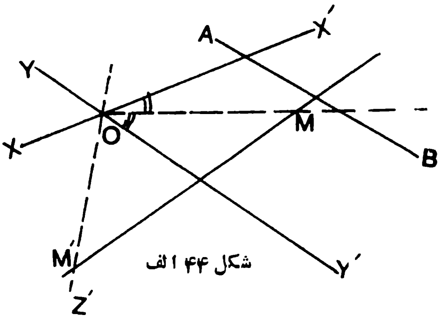
۴۴ـ نقطه‌هائی‌که به‌یك فاصله از دونقطه A و B باشند روی عمود منصف AB واقع‌اند و نقطه‌هائی‌که از دوخط xx' و yy' به یك فاصله باشند. اگر دوخط متقاطع

---

۱ ـ سه خط دیگر که بر نقطه A می‌گذرند بدست می‌آیند‌که نسبت فاصله‌های نقطه‌های آنها از دوخط Ax و Ay برابر $\frac{p}{q}$ می‌باشد.

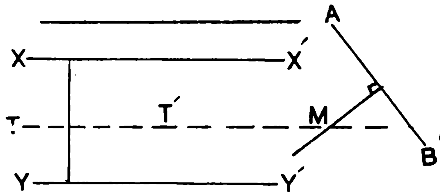
باشند روی یکی از نیمسازهای زاویهٔ بین دوخط قرار دارند و اگـر متوازی باشند روی خطی واقع‌اندکه موازی آنها و به‌یك فاصله ازآنها رسم شود.

بحث:



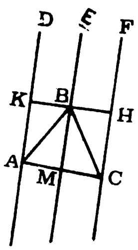
شکل ۴۴ الف

درحالتی‌که دوخط xx' و yy' متقاطع باشند و عمود منصف پـاره‌خط AB مـوازی بـا نیمسازهـای زاویه بین دوخط نباشد مسئله دو جواب‌دارد (نقطه‌های M و M') درحالتی‌که عمود منصف پاره‌خط AB موازی با یکی از نیمسازها باشد مسئله فقط یك جـواب دارد.



شکل ۴۴ ب

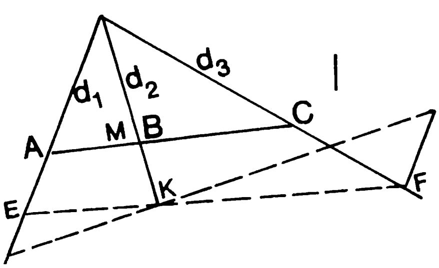
درحالتی‌که دوخط xx' و yy' موازی وعمود منصف پـاره‌خط AB مـوازی tt' (خط tt' موازی با xx' و yy' و به‌یك‌فاصله ازآنها می‌باشد) نباشد مسئله یك جـواب دارد. (ش ۴۴ ب) اگر دراین‌حالت عمود منصف با tt' موازی باشد مسئله جواب ندارد.



شکل ۴۵

۴۵ـ اگرمسئله حل شده فرض شود و A و B و C نقطه‌های مفروض و خطهای AD و BE و CF خطهای مطلوب باشد باید BK=BH شده ولذا لازم است AC به‌وسیله BE نصف شودیعنی BE ازنقطه M وسط AC می‌گذرد بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.

با وصل‌کردن سه‌نقطه A و B و C به یکدیگر نسبت ABC پدید می‌آید، ازنقطه B به M وسط AC وصل‌کرده واز دونقطه A و C خطهای موازی این خط رسم می‌کنیم تا سه خط مطلوب پدیدآید. (ش ۴۵)



شکل ۴۶

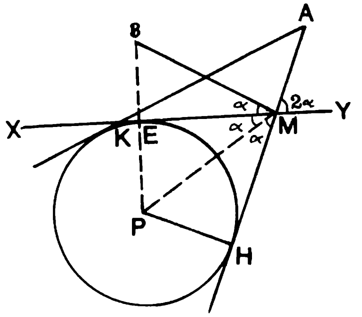
۴۶ـ نقطه‌ای‌مانند k روی $d_۲$ اننخاب‌می‌کنیم وخطی رسم می‌کنیم بطوری‌که دوسرش روی $d_۱$ و $d_۳$ بـاشد و نسبت طـول آنها مساوی $\frac{m}{n}$ باشد

$$\frac{KE}{KF}=\frac{m}{n}$$

بعد از M موازی EF رسم می‌کنیم:

$$\frac{KE}{KF}=\frac{m}{n}=\frac{AB}{BC}$$

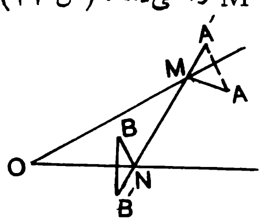
۴۷ـ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و M نقطه مطلوب باشد پس $\widehat{BMX}=\alpha$ و $\widehat{AMy}=2\alpha$، قرینه B را نسبت به Xy که نقطه P است تعیین کرده و با وصل کردن P به M داریم: $\widehat{HMX}=2\alpha$ و $\widehat{XMP}=\alpha$ و چون $\widehat{HMX}$ مساوی با دوبرابر $\widehat{PMH}$ است لذا $\widehat{PMH}=\alpha$ می‌باشد. پس دایره به مرکز P و به شعاع PE برامتداد AM مماس است. بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. قرینه نقطه B را نسبت به Xy پیدا کرده (نقطه P) و سپس به مرکز P و شعاع PE دایره‌ای رسم می‌کنیم از نقطه A مماسی براین دایره رسم می‌کنیم تا Xy را درنقطه M قطع کند M جواب مسئله است. چون نقطه A



شکل ۴۷

درخارج دایره (PE و P) واقع دوخط Xy مماس بر آن می‌باشد لذا همواره رسم مماس از نقطه A بر دایره (PE و P) امکان‌پذیر است و نقطه تلاقی آن با Xy، نقطه مطلوب M می‌باشد، از نقطه A دومماس AH و AK را می‌توان بر دایره (PE و P) رسم کرد ولی از روی شکل دیده می‌شود که فقط مماس AH نقطه M را می‌دهد. (ش ۴۷)

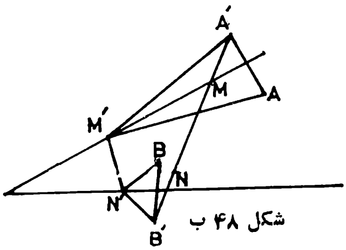
۴۸ـ اگر خط شکسته AMNB سه پاره‌خط مطلوب باشد و قرینه نقطه A نسبت به ox را A' و قرینه نقطه B نسبت به oy را B' بگیریم $MA=MA'$ و $NB=NB'$ است



شکل ۴۸ الف

و لذا: $MA+MN+NB=A'M+MN+NB'=A'MNB'$، $A'MNB'$ خط راستی است که کوتاهترین فاصله بین دونقطه A' و B' را نشان می‌دهد (ش ۴۸)

بنابراین برای حل مسئله راه ترسیمی زیر بدست می‌آید. قرینه نقطه A را نسبت به ox وقرینه نقطه B را نسبت به oy بدست‌آورد. وخط $A'B'$ را می‌کشیم محل برخورد این خط با ox و oy نقطه‌های M و N می‌باشد. حال باید ثابت کرد که اگر دونقطه

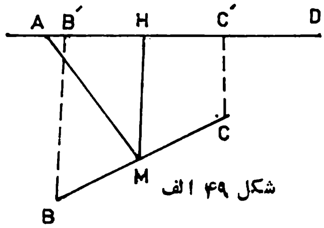


شکل ۴۸ ب

M' و N' به‌طریق دیگری انتخاب شوند مجموع $AM'+M'N'+N'B$ بیشتر از مقداری است که به‌طریق بالا بدست آمده‌است زیرا:

$$AM'+M'N'+N'B=A'M'+M'N'+N'B'>A'B'$$

«محیط خط شکسته محدب از پاره‌خطی که ابتداء و انتهای آن را به‌هم وصل می‌کند بیشتر است.»



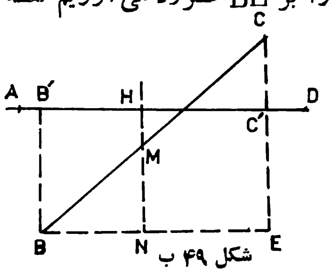
شکل ۴۹ الف

۴۹ــ حالت اول ــ اگر پاره‌خط AB، با خط D متقاطع نباشد. اگر H تصویرقائم نقطه M (وسط BC) بر D باشد ازذوزنقه $BCC'B'$ نتیجه می‌شود. (ش ۴۹ الف)

$$MH=\frac{BB'+CC'}{۲}=\frac{l}{۲}$$

بنابراین H از یك طرف بر دایره به مرکز M و شعاع $\frac{l}{۲}$ وازطرف دیگر بردایره‌ای به‌قطر AM واقع است. لذا راه‌حل زیر بدست می‌آید. دایره (C) را به مرکز M و و به‌شعاع $\frac{l}{۲}$ و دایره (l) را به قطر AM (M وسط BC) رسم می‌کنیم نقطه تلاقی این دو دایره[1] H را مشخص می‌کند AH خط مطلوب D می‌باشد.

حالت دوم ــ اگر خط D پاره‌خط AB را قطع‌کند ازنقطه C عمود CC' را را بر D فرود آورد و آن را امتداد می‌دهیم تا خطی راکه از B موازی D رسم می‌شود درنقطه E قطع کند از نقطه M (وسط BC) عمود MN را بر BE فرود می‌آوریم نقطه N بر دایره به‌قطر MB و از طرف دیگر بر دایره

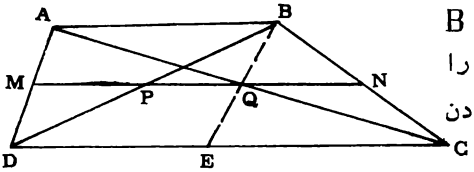


شکل ۴۹ ب

به مرکز M وشعاع $MN=\frac{l}{۲}$ واقع است بنابراین مانند حالت قبل پس از تعیین N امتداد D وبا توجه به‌نقطه A خط D مشخص می‌شود. (ش ۴۹ ب)

۱ــ دو دایره (C) به‌مرکز M و شعاع $\frac{l}{۲}$ و دایره (l) به قطر AM متقاطع یا متداخل یا مماس داخل‌اند زیرا مرکزدایره (C) بر محیط دایره (L) واقع است،

۵۰ـ اگر MPQN پاره‌خط مطلوب فرض شود باید $MP=PQ=QO$ باشد. از B به Q وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا DC را در نقطه E قطع کند با توجه به موازی بودن MN با DC می‌توان نوشت:



شکل ۵۰

$$\frac{PQ}{DE}=\frac{QN}{EC}$$

اما چون $PQ=QN$ است لذا: $DE=EC$ یعنی E وسط ضلع DC از ذوزنقه است بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.

از نقطه E وسط DC خطی به رأس B وصل کرده و از نقطه تلاقی این خط با قطر AC خطی موازی با قاعده رسم می‌کنیم این خط در نقطه‌های تلاقی با ساقها و قطر دیگر به سه پاره‌خط متساوی تقسیم می‌شود زیرا می‌توان نوشت:

$$\frac{QN}{EC}=\frac{PQ}{DE}\ ,\ EC=DE \Longrightarrow QN=PQ$$

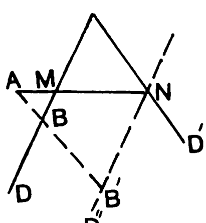
از طرف دیگر:

$$\frac{MP}{AB}=\frac{DP}{DB}=\frac{CN}{CB}=\frac{QN}{AB}\Longrightarrow\frac{MP}{AB}=\frac{QN}{AB}\Longrightarrow MP=QN$$

یعنی $MP=PQ=QN$ است.

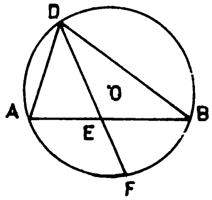
با انتخاب نقطه F وسط قاعـده AB و همین روش ترسیم پاره‌خط دیگری بدست می‌آید که جواب دوم مسئله است.

۵۱ـ اگر M و N نقطه‌های مطلوب باشند باید $\frac{AN}{AM}=۳$ باشد یك مکان نقطه N خط D' است مکان دیگر آن D'' مجانس خط D با مرکز تجانس A و نسبت تجانس ۳ می‌باشد. بنابراین D'' مجانس D را تعیین می‌کنیم تلاقی D' و D'' نقطه N را می‌دهد AN را می‌دهد AN را وصل کـرده از تلاقی آن بـا خط D، نقطه M مشخص می‌شود. (ش ۵۱) برای رسم خط D'' مجانس D یك نقطه دلخواه مانند B بر D انتخاب کرده و AB را تا نقطه B' به قسمتی امتداد می‌دهیم که BB' دو برابر AB باشد از B' خطی موازی D رسم می‌کنیم این خط D'' مجانس D است در تجانسی که مرکز آن A و نسبت تجانس ۳ اختیار شده است.



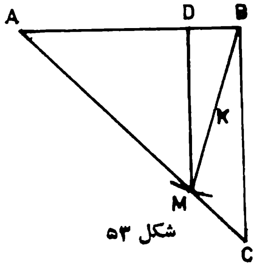
شکل ۵۱

۵۲- کمان ACB ازدایرهٔ O مفروض‌است. می‌خواهیم D را روی آن چنان اختیارکنیم‌که $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$ باشد. اگـر DE نیمساز زاویهٔ D بـاشد در مثلث ADB مـی‌توان نوشت: $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BD}$ پس $\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$ ضمناً نیمساز $\hat{D}$ کمـان $\widehat{AB}$ را در نقطهٔ F نصف می‌کند، بنابراین راه‌حل مسئله چنین است: روی AB نقطه E را چنان اختیار می‌کنیم‌که $\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n}$. این نقطه را به‌وسط‌کمان $\widehat{AB}$، نقطـه F وصل‌می‌کنیم تا خط FEکمان $\widehat{ACB}$ را در D قطع کند. این نقطـه جواب مسئله است. (ش ۵۲)



شکل ۵۲

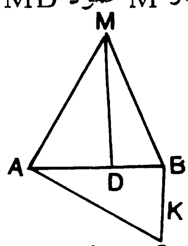
۵۳- روی‌قطعه خط AB مثلث‌متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC را می‌سازیم به‌مرکز B و به‌شعاع K کمانی رسم می‌کنیم‌که AC را در M قطع‌کنداز M عمود MDرا بر AB فرود می‌آوریم، D نقطهٔ مطلوب است زیرا:



شکل ۵۳

$AD^2+BD^2=DM^2+DB^2=BM^2=K^2$ مسئله دو یا یك‌جواب دارد ویا دارای جواب نیست. (ش ۵۳)

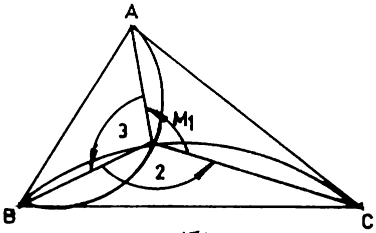
۵۴- از B عمود BC را بر AB اخراج‌می‌کنیم و BC را برابر K اختیارمی‌کنیم به مرکز A و به‌شعاع AC یك‌کمان به مرکز B و شعاع BA کمان دیگری رسم می‌کنیم تـا یکدیگر را در M قطع‌کنند از M عمود MD را بر AB فـرود می‌آوریم D نقطهٔ مطلوب است زیرا:



شکل ۵۴

$$DA^2=AM^2-DM^2=AC^2-DM^2$$
$$DB^2=BM^2-DM^2=AB^2-DM^2$$
$$DA^2-DB^2=AC^2-AB^2$$

و در مثلث ABC مقدار $AC^{۲}-AB^{۲}$ برابر با $BC^{۲}$ یا $K^{۲}$ می‌باشد. (ش ۵۴)



شکل ۵۵

۵۵- باید سه‌زاویهٔ $\hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}=\hat{M}_{۳}$ باشد وچون مجموع‌زاویه‌ها ۳۶۰° است بنا براین:

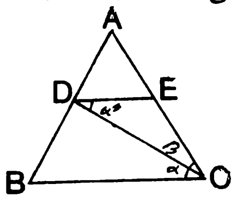
$$\hat{M}_{۱}+\hat{M}_{۲}+\hat{M}_{۳}=۳۶۰^\circ$$

و

$$\hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}=\hat{M}_{۳}=۱۲۰^\circ$$

پس برای پیداکردن نقطه M کمان درخور روبرو به‌ضلع BCکه از آن این‌ضلع با زاویه ۱۲۰° دیده شود رسم می‌کنیم و کمان درخور مربوط به ضلع AB که از آن این ضلع به زاویه ۱۲۰° دیده شود نیز رسم می‌کنیم. (ش ۵۵)

این دوکمان یکدیگر را درنقطه‌های M و B قطع می‌کند زاویه $\widehat{AMC}$ نیز ۱۲۰° است. M جواب مسئله است.



شکل ۵۶

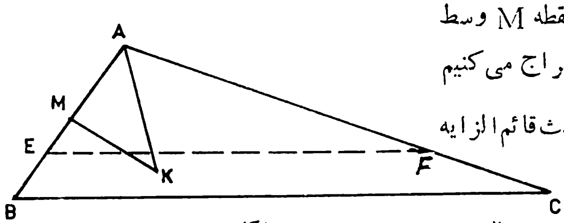
۵۶- اگر DE برابر CE شود زاویه α برابر β خواهد شد. وچون α با α' نیز برابراست پس D پای نیمساز زاویه C است. (ش ۵۶)

۵۷- فرض می‌کنیم EF مثلث ABC را به دو قسمت معادل تقسیم کرده باشد.

$$\frac{۱}{۲}=\frac{\text{مساحت } AEF}{\text{مساحت } ABC}$$ و چون EF با BC موازی است پس $$\frac{AE^{۲}}{AB^{۲}}=\frac{\text{مساحت } AEF}{\text{مساحت } ABC}$$

و بنا براین :

$$\frac{AE^{۲}}{AB^{۲}}=\frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ ، } AE=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

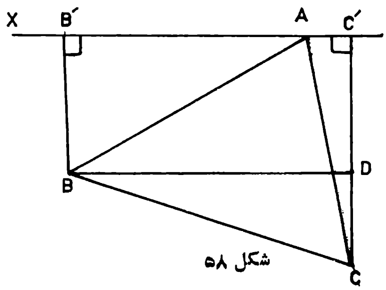


شکل ۵۷

پس راه‌حل مسئله چنین‌است: از نقطه M وسط AB عمود MK را بر AB اخراج می‌کنیم به قسمی که $MK=\frac{AB}{۲}$، درمثلث قائم‌الزایه AKM می‌نویسیم:

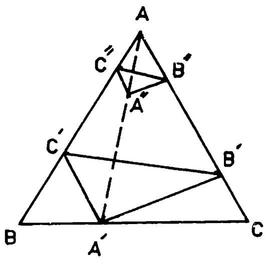
$$AK^{۲}=AM^{۲}+MK^{۲}=۲AM^{۲}$$

$AK^{۲}=۲\times\frac{AB^{۲}}{۴}$ یا $AK=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$، AE را برابر AK جدا می‌کنیم از E خطی موازی BC رسم می‌کنیم. (ش ۵۷)



شکل ۵۸

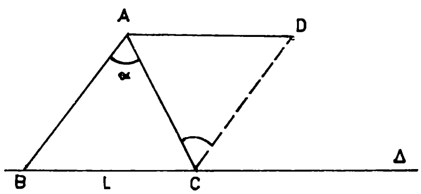
۵۸– فرض می‌کنیم خط AX جواب مسئله باشد که $B'C'=L$ از B خط BD را به‌موازات AX رسم می‌کنیم تا CC' را در D قطع کنند شکل $BB'C'D$ مستطیل است و $BD=L$ می‌باشد بنابراین راه‌حل مسئله چنین است که به‌قطر BC نیمدایره‌ای رسم کرده و به‌مرکز B و به‌شعاع L دایره‌ای می‌کشیم که نیمدایره‌را در D قطع‌کند از A خط AX را بموازات BD رسم می‌کنیم (ش ۵۸). اگر $L<BC$ باشد مسئله دارای دوجواب است اگر $L=BC$ باشد مسئله یك جواب دارد و اگر $L>BC$ باشد مسئله دارای جواب نیست.



شکل ۵۹

۵۹– فرض می‌کنیم $A'B'C'$ مثلثی با شرط مزبور باشد. خط $B''C''$ را موازی $B'C'$ و سپس $B''A''$ و $C''A''$ را به‌ترتیب موازی با $B'A'$ و $C'A'$ رسم می‌کنیم. ضلعهای دومثلث $A''B''C''$ و $A'B'C'$ نظیر به‌نظیر متوازیند لذا خطهای $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ همرس می‌باشند یعنی $A'A''$ از رأس A می‌گذرد بنابراین خط اختیاری $B''C''$ را موازی یکی از خطهای مفروض و سپس $B''A''$ و $C''A''$ را موازی با دوخط مفروض دیگر رسم می‌کنیم. خط AA'' ضلع BC را در A' قطع می‌کند از A' خطهای $A'B'$ و $A'C'$ را به‌ترتیب موازی با $A''B''$ و $A''C''$ رسم می‌کنیم. (ش ۵۹)

۶۰– مسئله را حل شده فرض می‌کنیم دراین‌صورت $\widehat{BAC}=\alpha$ و $BC=l$ می‌باشد.

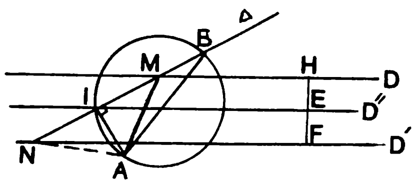


شکل ۶۰

ازنقطه A، AD را موازی و مساوی با BC رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است و D نقطه ثابتی می‌باشد و زاویه $\widehat{ACD}=\alpha$ است. نقطه C محل برخورد خط Δ با مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آنها پاره‌خط AD به زاویه معیین α دیده می‌شود بنابراین راه ترسیم بدست آید. ازنقطه A، AD را موازی Δ و مساوی با l و کمان درخور زاویه α را نظیر به وتر AD رسم کرده و محل تلاقی آنرا با Δ تعیین می‌کنیم، اگر C نقطه تلاقی کمان درخور با Δ باشد، AC را وصل

کرده و از A خطی موازی CD می‌کشیم تا Δ را در نقطه B قطع‌کند. (ش ۶۰) شرط امکان مسئله آن است که کمان درخور زاویه α نظیر به‌وتر AD خط Δ را قطع‌کند یا بر آن مماس باشد. اگر کمان درخور خط Δ را در دونقطه C و C' قطع‌کند، مسئله دوجواب دارد

۶۱- نقطه I وسط MN از D و D' به‌یك فاصله است و ازطرف دیگر ازتساوی $AM=AN$ نتیجه می‌شودکه AI بر MN عمود است و لذا نقطه I بر دایره‌ای به‌قطر AB در محل تلاقی‌آن با خط D'' که موازی با D و D' و متساوی‌الفاصله از این دو خط می‌باشد واقع است بنابراین راه ترسیم زیر مشخص می‌شود. به قطـر AB دایره‌ای رسم می‌کنیم و HF عمود مشترك دو خط متوازی D و D' را رسم‌کرده و ازنقطه E وسط آن خط D'' را موازی با D و D' می‌کشیم نقطه تلاقی D'' با دایره نقطه I وسط پاره‌خط MN است و چون I را به B وصل‌کنیم، M و N مشخص می‌شوند.



شکل ۶۱

شرط امکان مسئله تلاقی دایره به‌قطر AB با خط D'' است.

اگر D'' دایره را در دونقطه قطع‌کند مسئله دو جواب دارد

اگر D'' بر دایره مماس شود مسئله یك جواب دارد.

اگر D'' دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

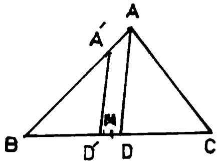
۶۲- فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد و $A'D'$ خطی باشد عمود بر ضلع BC که مثلث ABC رابه‌دوقسمت‌معادل تقسیم‌کرده است ارتفاع AD را می‌کشیم. (ش ۶۲) و M وسط BC است. باید $\left(\frac{۱}{۲}\text{مساحت } ABC\right)=(\text{مساحت } BD'A')$ یا:

$$\frac{BD'\times D'A'}{۲}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{BC\times DA}{۲}=\frac{۱}{۲}BM\times DA$$

پس $\frac{BD'}{BM}=\frac{DA}{D'A'}$ ولی $\frac{DA}{D'A'}=\frac{BD}{BD'}$

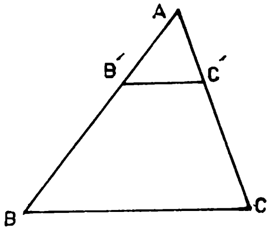
و از آنجا

$\frac{BD'}{BM}=\frac{BD}{BD'}$ یا: $BD'^{۲}=BM\ .\ BD$



شکل ۶۲

بنا بر این راه حل مسئلهٔ چنین است: ارتفاع AD را رسم می‌کنیم و M وسط BC را معیین می‌کنیم و بین BD و BM واسطه هندسی تعیین می‌کنیم تا $B'D$ معلوم شود. از D' عمودی بر BC اخراج می‌کنیم $A'D'$ جواب مسئله است.



شکل ۶۳

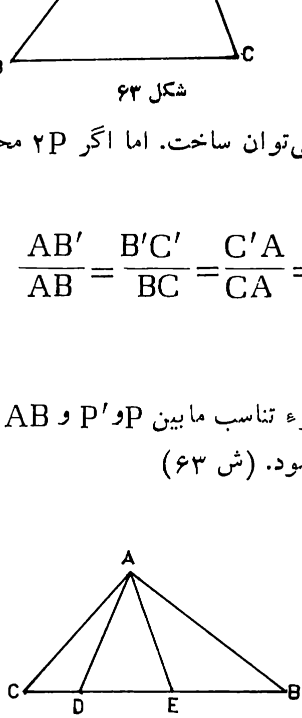
۶۳ــ فرض می‌کنیم مسئله حل شده $A'B'C'$ مثلث مطلوب باشد و آن را طوری قرار می‌دهیم که زاویهٔ A بر زاویه A' منطبق شده ضلعهای نظیر AC و AB روی آنها قرار گیرند هرگاه نقطهٔ B' مشخص باشد مثلث $AB'C'$ را می‌توان ساخت. اما اگر $۲P$ محیط مثلث ABC باشد داریم:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A}{CA}=\frac{AB'+B'C'+C'A}{AB+BC+AC}=\frac{۲P'}{۲P}$$

پس: $\frac{AB'}{AB}=\frac{P'}{P}$

بنا بر این برای تعیین AB' کافی‌است چهارمین جزء تناسب ما بین P و P' و AB را تعیین کنیم. پس از تعیین AB' مثلث $AB'C'$ رسم می‌شود. (ش ۶۳)

۶۴ــ کافی است قاعده CB را در نقطه‌های D و E به‌نسبت ۲ و ۳ و ۵ تقسیم کنیم و این نقطه‌ها را به رأس A وصل کنیم سه مثلث پدید می‌آید که دارای ارتفاع مشترك می‌باشند و نسبت مساحت آنها بر نسبت قاعده‌ها است. (ش ۶۴)



شکل ۶۴

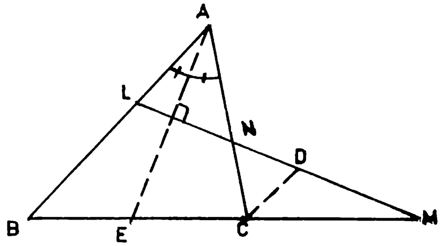
۶۵ــ اگر ABC مثلث و ML قاطع مطلوب باشد باید $LB=۲NC$ اگر از نقطه C خط CD را موازی AB رسم کنیم می‌توان نوشت:

$$\frac{CM}{MB}=\frac{CD}{LB}=\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی

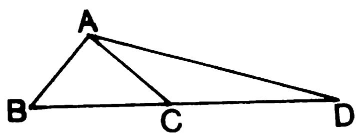
$$\frac{CN}{LB}=\frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

از مقایسه دوتساوی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $CN=CD$ است یعنی مثلث NCD متساوی‌الساقین است. اما مثلث ALN متشابه با CND و لذا لازم است مثلث LAN



شکل ۶۵

متساوی‌الساقین باشد یعنی $AL = AN$ حال اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم این خط بر قاعده مثلث ALN عمود است لذا طریق زیر برای ترسیم بدست می‌آید. نیمساز زاویه A را رسم کرده از نقطه M عمودی بر این نیمساز فرود می‌آوریم محل تلاقی این عمود با ضلعهای AC و AB نقطه‌های N و L می‌باشد. مسئله همیشه دارای یك جواب است زیرا از نقطه خارج یك خط همواره می‌توان یك عمود بر آن فرودآورد. باید توجه داشت که ممکن‌است عمود رسم شده امتداد ضلعهای AB و AC را قطع کندکه در آن‌صورت هم $BL = 2NC$ خواهد بود. (ش ۶۵)

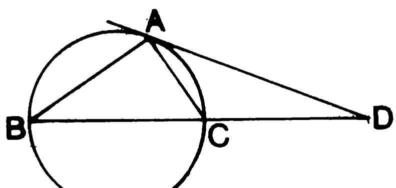


شکل ۶۶ الف

۶۶ـ اگر D نقطه مطلوب بر امتداد BC باشد باید رابطه

$$DA^2 = DC \cdot DB$$

برقرار باشد. (ش ۶۶ الف)

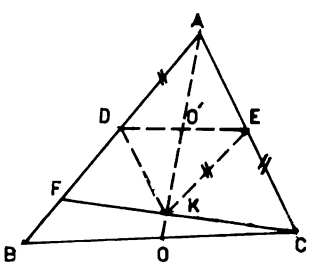


شکل ۶۶ ب

بنابراین دایره محیطی مثلث ABC را رسم کرده و از نقطه A مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و BC را امتداد می‌دهیم تا این‌مماس در نقطه D قطع کند D همان نقطه مطلوب است زیرا:

$$DA^2 = DC \cdot BD$$

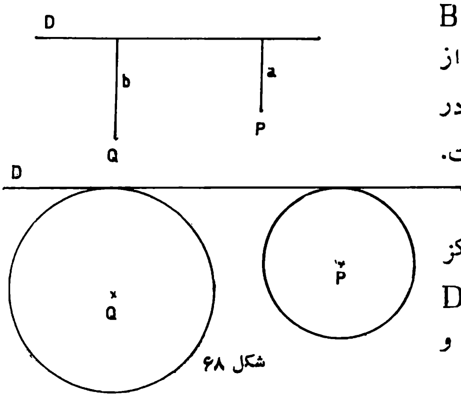
شرط امکان مسئله آن است‌که مماس بر دایره در نقطه A امتداد BC را قطع کند یعنی این مماس موازی BC نباشد. ش ۶۶ ب)



شکل ۶۷

۶۷ـ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر از نقطه E، پاره‌خط EK را موازی و مساوی و هم‌جهت‌با AD رسم کنیم چهارضلعی AEKD متوازی‌الاضلاع است. ملاحظه می‌شود اگر موضع نقطه K معلوم باشد مسئله حل می‌شود. مثلث KEC متساوی‌الساقین است وچون EK موازی AF است مثلث AFC نیز متساوی‌الساقین می‌باشد. AK از وسط DE می‌گذرد وچون DE موازی BC است لذا AK ازنقطه O وسط BC نیزمی‌گذرد بنابراین راه‌حل

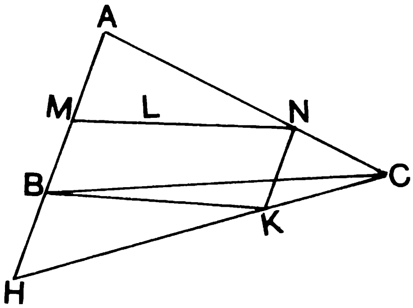
زیــر بدست می‌آید: AF را برروی ضلع AB به‌اندازه AC جــداکرده و CF را وصل مــی‌کنیم از نقطه A به O وسط BC خطی وصل می‌کنیم نقطه تلاقی AO و FC نقطه k می‌باشد. از K خطی موازی وهم‌جهت با BA مــی‌کشیم تا AC را در نقطه E قطع کند از E خطی موازی BC رسم کرده تا AB را در نقطه D قطع کند DE پاره‌خط مطلوب است. (ش ۶۷)



شکل ۶۸

۶۸ــ دایره‌های به‌مرکز P وشعاع a و به‌مرکز Q و شعاع b بــر خط D مماس‌اند. خط D مماس مشترك دو دایره به‌مرکزهای P و Q و شعاعهای a و b می‌باشد. (ش ۶۸)

۶۹ــ اگر مسئله حل شده و نقطه‌های M و N بدست آمده باشند چون از N قطعه خط NK را موازی و مساوی بـا MB رسم کنیم چهارضلعی BMNK متوازی‌الاضلاع و BK مساوی بـا l مــی‌باشد. مثلث KNC متساوی‌الساقین است، امتداد CK ضلع AB را در نقطه H قطع می‌کند مثلث AHC نیز متساوی‌الساقین‌می‌شودلذا درنتیجه K از طرفی بر روی CH واقع است و از طــرف دیگر بر روی دایره‌ای‌که به‌مرکز B وشعاع l رسم شود قراردارد (ش ۶۹) بنابراین:

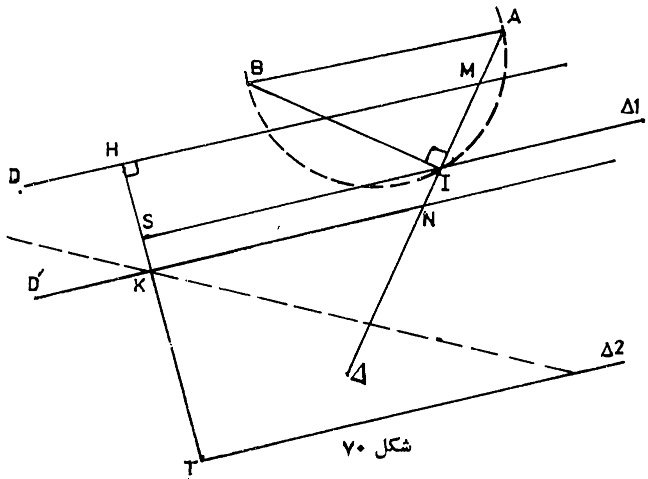


شکل ۶۹

ضلع AB را تا نقطه H طوری امتداد می‌دهیم کــه AH=AC باشد (به فرض AC>AB). به مرکز B و شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم تا CH را درنقطه K قطع کند. از K خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع‌کند از N خطی‌موازی با BK می‌کشیم تا AB را درنقطه M تلاقی‌کند. M و N نقطه‌های مطلوب‌اند.

شرط امکان مسئله آن است‌که دایره به مرکز B و شعاع l خط CH را قطع کرده یا برآن مماس باشد.

۷۰ــ اگــر مسئله حل شده و Δ خط مطلوب بــاشد، یك مکان نقطه I خطی است موازی با D که نسبت فاصله‌های هرنقطه از آن از دوخط موازی D و D' برابر K باشد. مکان دیگر نقطه I دایره‌ای است به‌قطر AB. بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید. برروی

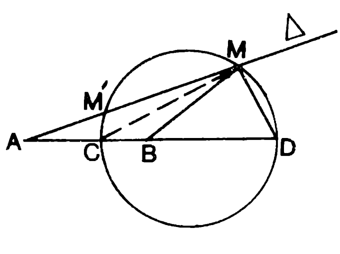


شکل ۷۰

عمود مشترك D و D′ که خط HK می‌باشد دو نقطه S و T را چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{SH}{SK}=\frac{TH}{TK}$ باشد.

از نقطه‌های S و T خطهایی به موازات D رسم می‌کنیم تا دایره به قطر AB را در نقطه I قطع‌کند. I را بـه A وصل کرده تا D و D′ را در نقطه‌های M و N قطع کند. شرط امکان مسئله آن است کـه دایره به قطر AB خط Δ_1 یا Δ_2 را قطع کند مسئله ممکن است دارای چهار یا دو یا یك جواب یا بدون جواب باشد. (ش ۷۰)

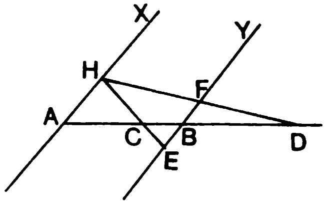
۷۱ــ اگر مسئله حل شده فرض‌شود و M نقطه مطلوب بـاشد لازم است $\widehat{AMC}=\widehat{CMB}$ باشد یعنی MC نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ است. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه M برهم عمودند پای‌نیمسازهای‌داخلی‌وخارجی برروی ضلع AB بـا دونقطه B و A تشکیل تقسیم تـوافقی مـی‌دهند یعنی نقطه‌هـای D و C مـزدوجهای تـوافقی دونقطه B و A هستند به‌این ترتیب راه‌حل زیر بدست می‌آید.



شکل ۷۱ الف

ابتداء مـزدوج توافقی نقطه C را نسبت به دونقطه A و B تعیین می‌کنیم (دوخط متوازی AX و BY را رسم‌کرده ویك‌پاره‌خط به‌اندازه دلخواه از نقطه B و در دوطرف

آن نقل و CE را وصل مـی‌کنیم تا AX را درنقطه H قطع‌کند امتداد HF، امتداد AB را در نقطه D قطع مـی‌کند (ش ۷۱ ب) D مزدوج توافقی C نسبت به B و A می‌باشد) پس از تعیین نقطه D به قطر CD دایـره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطه M قطع کند. M نقطه مطلوب است.



شکل ۷۱ ب

شرط امکان مسئله آن است که دایره به‌قطر CD خط Δ را قطع‌کند یا بر آن مماس باشد.

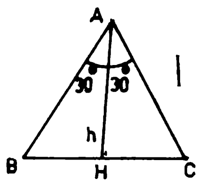
اگر Δ دایره را در دونقطه قطع‌کند مسئله دوجواب دارد.

اگر Δ بر دایره مماس باشد مسئله یك جواب دارد.

اگر Δ دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

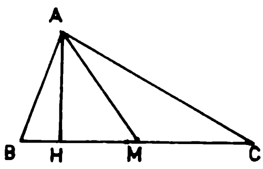
فصل چهارم

حل مسئله‌های ترسیم مثلث



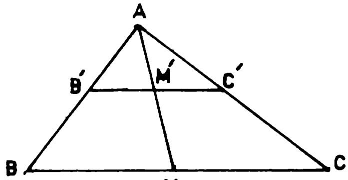
شکل ۷۲

۷۲ـ ارتفاع را رسم می‌کنیم، از یك انتهای آن عمودی بر آن اخراج می‌کنیم و از انتهای دیگر در دو طرف دو زاویه $30°$ می‌سازیم ضلعهای آنها عمود مرسوم را در دو رأس دیگر مثلث قطع می‌کند. (ش ۷۲)



شکل ۷۳

۷۳ـ ابتدا مثلث قائم‌الزاویه AHM را با معلوم بودن AH و AM رسم می‌کنیم (وتر و یك‌ضلع)، سپس MC و MB را با اندازهٔ $\frac{BC}{2}$ جدا می‌کنیم رأسهای B و C بدست می‌آیند. (ش ۷۳)

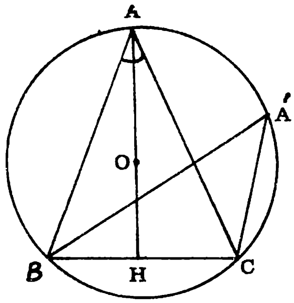


شکل ۷۴

۷۴ـ وقتی که از مثلثی دو زاویه معلوم باشد زاویهٔ سوم نیز معلوم است. زاویهٔ A را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه C' واقع بر یك‌ضلع این زاویه، زاویه‌ای برابر با زاویه C رسم می‌کنیم $(\hat{C}'=\hat{C})$ تا ضلع دیگر زاویه را در B' قطع کند. میانهٔ AM' از مثلث $AB'C'$

را رسم می‌کنیم و به‌اندازه میانهٔ مفروض AM ادامه می‌دهیم، اگر از M بموازات $B'C'$ رسم کنیم مثلث ABC بدست آید. (ش ۷۴)

۷۵ـ کمان درخور زاویه $\hat{A}$ را با وتر BC رسم می‌کنیم هر نقطه دلخواه مانند A' از این کمان که به دونقطه B و C وصل شود مثلث ABC را با قاعده $BC=a$ و زاویه مقابل آن $\hat{A}$ نشان می‌دهد. چون BC در همه مثلثها ثابت‌می‌باشد ماکزیمم محیط مثلث وقتی بدست می‌آید که $AB+AC$ بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کند، در مثلث ABC می‌توان نوشت:



شکل ۷۵

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C} \Longrightarrow AC=\frac{a}{\sin A}\cdot \sin B \ , \ AB=\frac{a}{\sin A}\cdot \sin C$$

و چون a و $\sin A$ هر دومقدارهای ثابتی می‌باشند داریم:

$$AB+AC=\frac{a}{\sin A}(\sin B+\sin C)=K(\sin B+\sin C)$$

$$AB+AC=۲K\cdot \sin\frac{B+C}{۲}\cdot \cos\frac{B-C}{۲}=۲K\cos\frac{A}{۲}\cdot\cos\frac{B-C}{۲}$$

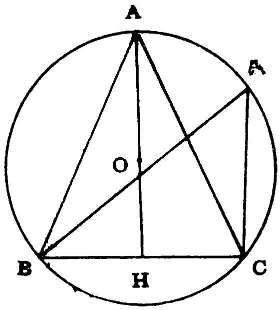
$$AB+AC=۲\times\frac{a}{۲\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}\cdot\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B-C}{۲}=\frac{a}{\sin\frac{A}{۲}}\cdot\cos\frac{B-C}{۲}$$

ماکزیمم $AB+AC$ وقتی است که $\cos\frac{B-C}{۲}$ بیشترین مقدار خود را اختیار کند.

$$\cos\frac{B-C}{۲}=۱ \Longrightarrow \cos\frac{B-C}{۲}=۰ \Longrightarrow B=C$$

یعنی وقتی مثلث ABC بیشترین محیط را دارد که متساوی‌الساقین باشد ــ رسم مثلث کمان درخور زاویه A با وتر BC رسم کرده و عمود منصف BC را اخراج می‌کنیم تا محیط دایره را در نقطه A قطع کند ABC مثلث مطلوب است. (ش ۷۵)

۷۶ـ کمان درخور زاویه $\hat{A}$ را باوتر $BC=a$ رسم می‌کنیم. هر نقطه دلخواه مانند



شکل ۷۶

A′ ازاین‌کمان‌که به‌دو نقطه B و C وصل‌شود مثلث ABC را بـا قاعده $BC=a$ و زاویه مقابل آن $\hat{A}$ نشان‌می‌دهد. مساحت مثلث برابر است با $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ وچون a مقدارثابتی است لذا ماکزیمم مساحت مثلث وقتی است که h_a بیشترین مقدار ممکن خـود را اختیار کند. (ش ۷۶)

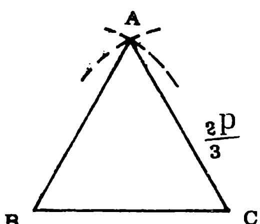
بنابراین دورترین نقطه‌ای از کمان درخور از وتـر BC می‌باشد. ایـن نقطه محل برخورد قطر عمود بر وتر با محیط دایره است یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌شود.

رسم مثلث ـ مانند مسئله قبل است.

۷۷ـ مساحت هرمثلث ازدستور $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ بدست‌می‌آید که در آن $2p=a+b+c$ بنا به‌فرض مسئله مقدار ثابتی می‌باشد ماکزیمم مساحت مثلث وقتی است‌که حاصلضرب سه عامل متغیر مثبت $p-a$ و $p-b$ و $p-c$ ماکزیمم باشد. حاصل‌جمع این سه مقدار مثبت برابر است با

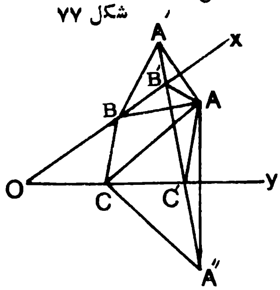
$$(p-a+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p$$

که مقدار ثابتی است و لذا حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که عاملها با هم متساوی باشند یعنی: $p-a=p-b=p-c$ و درنتیجه $a=b=c$ باشد لـذا مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شود.



شکل ۷۷

رسم مثلث‌ـ رسم مثلث‌متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $\frac{2p}{3}$ می‌باشد که در رسم مثلث تـوضیح داده شده است



شکل ۷۸

۷۸ـ اگر ABC مثلث‌مطلوب باشد،قرینه‌های نقطه A را نسبت بـه ox و oy تعیین کرده A′، A″ بدست‌می‌آید،A′ را به B و A″ را به C وصل می‌کنیم داریم:

$AB+BC+CA=$ محیط مثلث ABC

$A'B+BC+CA''=$ محیط مثلث ABC

و لذا می‌توان نوشت:

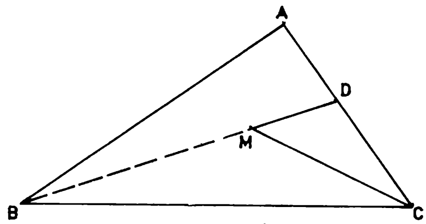
$$A'A'' < A'B + BC + CA''$$

اما $A'A'' = A'B' + B'C' + C'A''$ و اگر B' و C' را به A وصل کنیم داریم:

$$A'A'' = B'A + B'C' + C'A < AB + BC + CA$$

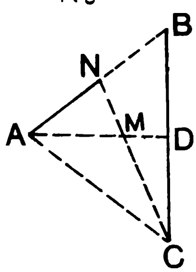
یعنی محیط مثلث $AB'C'$ کمترین است.

رسم مثلث ــ با توجه به‌آنچه دربالا گفته شد قرینه‌های نقطه A را نسبت به ox و oy را بدست‌آورده و این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کنیم تا پاره‌خط حاصل ox و oy را در B' و C' قطع کند مثلث $AB'C'$ جواب مسئله است.



شکل ۷۹

۷۹ــ مثلث MBC را بامعلومات سه‌ضلع رسم می‌کنیم چون میانهٔ وارد بر ضلع AB و میانهٔ وارد برضلع AC معلوم است. $\frac{۲}{۳}$ طول آنها MC و MB می‌باشد. (ش ۷۹) پس‌از رسم مثلث ضلع MB را به‌اندازهٔ نصف‌آن از M امتداد می‌دهیم نقطه D بدست می‌آید از C به D وصل کرده به‌اندازه‌خودش امتداد می‌دهیم رأس A مشخص می‌شود.

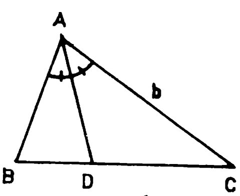


شکل ۷۹

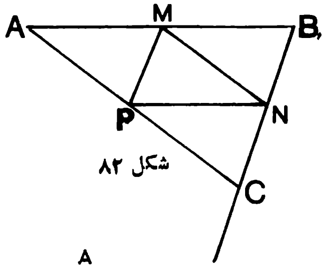
۸۰ــ ابتداء مثلث AMN را با معلوم بودن سه ضلع رسم می‌کنیم و بعد رأسهای C و D را بدست می‌آوریم. (ش ۸۰)

$$AN = \frac{AB}{۲} \ , \ AM = \frac{۲}{۳} AD \ , \ NM = \frac{۱}{۳} CN$$

۸۱ــ ابتداء مثلث ADC را بادوضلع $AC = b$ و $AD = d$ و $\widehat{DAC} = \frac{\hat{A}}{۲}$ می‌سازیم و زاویهٔ $\widehat{DAB}$ را برابر $\frac{\hat{A}}{۲}$ رسم می‌کنیم. نقطه B محل برخورد ضلع این‌زاویه با امتداد DC می‌باشد. (ش ۸۱)

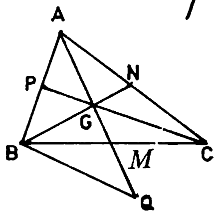


شکل ۸۱



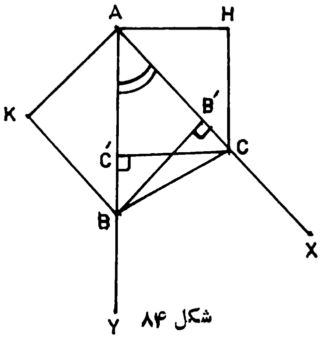
شکل ۸۲

۸۲– وسطهای ضلعها را بهم وصل می‌کنیم و از هر رأس مثلث حاصل بموازات ضلع مقابلش می‌کشیم، از برخورد این خطها، مثلث مطلوب بدست می‌آید. (ش ۸۲)



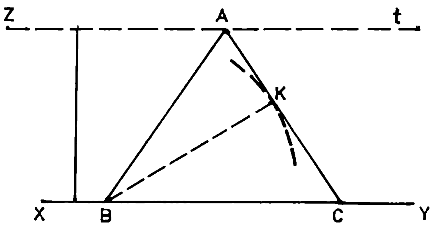
شکل ۸۳

۸۳– ابتدا مثلث GBQ را با معلوم بودن سه ضلع (هر ضلع به اندازه $\frac{۲}{۳}$ طول میانه نظیر) رسم می‌کنیم، سپس MG را بداندازهٔ دوبرابر خود و میانه BM را به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های A و C بدست آیند. (ش ۸۳)



شکل ۸۴

۸۴– زاویه $\widehat{YAX}$ را برابر A رسم می‌کنیم و از A عمودهای AK و AH را بر AX و AY بداندازه ارتفاعهای داده شده اخراج می‌کنیم از K و H دوخط بموازات AX و AY می‌کشیم تا AY را در B و AX را در C قطع کند، مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۸۴)



شکل ۸۵

۸۵– ابتدا برروی خط xy پاره‌خط BC را جدا کرده و خط zt را بموازات آن و به‌فاصله AH = h رسم می‌کنیم رأس A از مثلث ABC روی این خط واقع است. به‌مرکز B و شعاع R = BK (BK اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC است) کمانی رسم کرده و از C مماسی بر آن می‌کشیم تا امتداد مماس zt را در نقطه A قطع می‌کند مثلث ABC مثلث مطلوب است. (ش ۸۵)

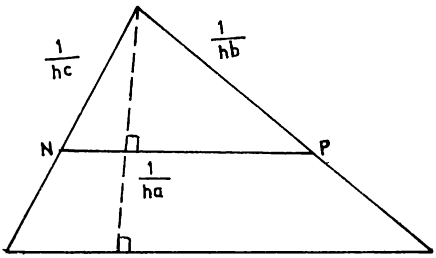
۸۶– رابطه $2s = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$

و یا رابطه

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

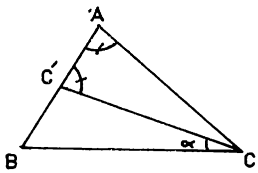
برقرار است

پس مثلث با ضلعهای a و b و c با مثلث با $\frac{1}{h_c}$ و $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_a}$ متشابه است. بنابراین مثلثی با ضلعهای عکس سه ارتفاع رسم می‌کنیم و یکی از ارتفاعهای آنرا آنقدر امتداد می‌دهیم تا برابر یکی از ارتفاعهای داده شده شود. و از انتهای آن خطی بموازات قاعدهٔ نظیرش رسم می‌کنیم تا دوضلع دیگر را در دونقطه قطع کند، مثلث مطلوب بدست می‌آید. (ش ۸۶)



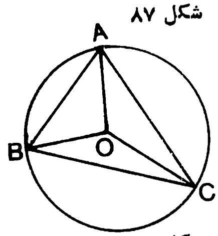
شکل ۸۶

۸۷- زاویه $\widehat{CC'A}$ را به اندازه زاویه $\hat{A}$ جدا می‌کنیم مثلث $CC'A$ متساوی‌الساقین است $CC'=CA$ و $\widehat{AC'C}=\hat{B}+\hat{\alpha}$ یا $\hat{A}=\hat{B}+\hat{\alpha}$ و $\hat{\alpha}=\hat{A}-\hat{B}$، پس از مثلث BCC' دوضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم‌است و این مثلث را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث رأس A بدست می‌آید. (ش ۸۷)



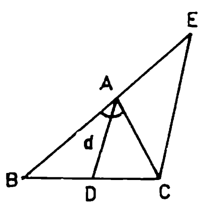
شکل ۸۷

۸۸- اگر AB و AC دو ضلع معلوم و O مرکز دایرهٔ محیطی باشد ازمثلث‌های AOB و AOC سه‌ضلع‌معلوم‌اند بارسم این‌مثلث‌ها، مثلث ABC رسم می‌شود. (ش ۸۸)



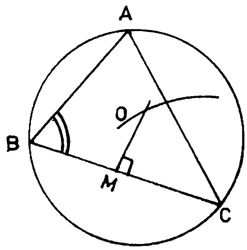
شکل ۸۸

۸۹- فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد از C خطی بموازات AD رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند، مثلث ACE متساوی‌الساقین است و می‌نویسیم $\frac{c}{c+b}=\frac{d}{CE}$ جزء چهارم این‌تناسب یعنی CE را با ترسیم می‌توان بدست آورد. پس راه‌حل مسئله چنین است. مثلث متساوی‌الساقین ACE (ش ۸۹) را با معلوم بودن سه‌ضلع رسم‌می‌کنیم و AE را تا نقطهٔ B به‌اندازهٔ $(AB=c)$ امتداد می‌دهیم، مثلث ABC بدست می‌آید.



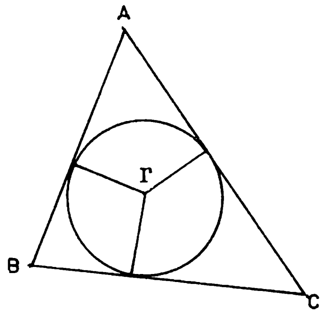
شکل ۸۹

۹۰ــ ضلع معلوم BC را می‌کشیم و عمود منصف آنرا رسم می‌کنیم و به‌مرکز B یا C به‌شعاع R کمانی رسم می‌کنیم که عمود منصف را در O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قطع کند و سپس دایــرهٔ محیطی مثلث را می‌کشیم و از نقطهٔ B خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه معلوم B را بسازد، محل برخورد ضلع دیگر این زاویه با دایره، رأس A می‌باشد. (ش ۹۰)

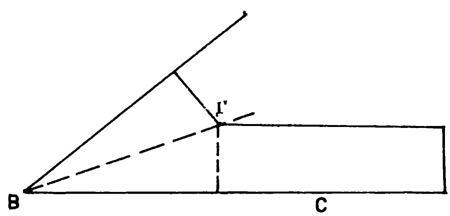


شکل ۹۰

۹۱ــ ضلع معلوم BC و زاویهٔ B را مــی‌سازیم و دایــرهٔ محاطی مثلث را مماس به دوضلع زاویهٔ B رسم می‌کنیم از رأس C مماس دیگری براین دایره می‌کشیم تا مثلث ABC مشخص شود. (ش ۹۱)

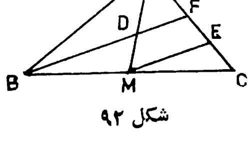


شکل ۹۱ ب



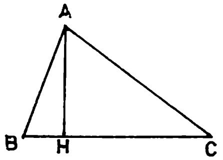
شکل ۹۱ الف

۹۲ــ ازمثلث ABC ارتفاع BF ومیانهٔ AM و ضلع BC معلوم است اگر از M خط ME را بموازات BF رسم کنیــم ME بــرابــر $\frac{BF}{۲}$ خــواهد بــود و زاویه E نیز قائمه می‌باشد. پس ابتداء مثلث قائم الزاویه MEC را بامعلوم بودن MC که برابر $\frac{BC}{۲}$ است



شکل ۹۲

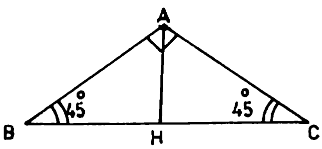
و ME رسم می‌کنیم و به مرکز M و به‌شعاع MA دایره‌ای می‌کشیم که امتداد EC را در A قطع کند و MC را به انــدازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۹۲)



شکل ۹۳

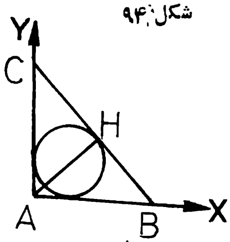
۹۳ـ دو مثلث قائم‌الزاویه AHB و AHC را با معلوم بودن AH و زاویه‌های C و B رسم می‌کنیم. مثلث ABC بدست می‌آید. (ش ۹۳)

۹۴ـ در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر وتر نصف وتر است و چون مثلث متساوی‌الساقین است ارتفاع، نیمساز زاویه هم می‌باشد. وتر مثلث را رسم می‌کنیم و از دو انتهای آن دو زاویهٔ 45° می‌سازیم تا رأس سوم بدست آید. (ش ۹۴)



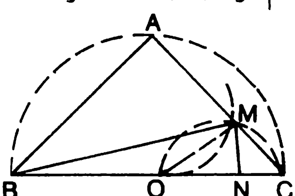
شکل ۹۴

۹۵ـ دایرهٔ محاطی‌را رسم می‌کنیم و دو مماس عمود برهم AX و AY را بر آن می‌کشیم به‌این‌ترتیب رأس A بدست می‌آید. به‌مرکز A و به شعاع AH ارتفاع مثلث دایره‌ای رسم می‌کنیم. مماس مشترك این‌دایره و دایرهٔ محاطی، AX را در B و AY در C قطع می‌کند. مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۹۵)



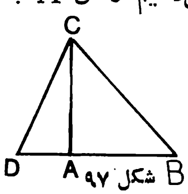
شکل ۹۵

۹۶ـ ابتداء نیمدایره‌ای به‌قطر BC رسم‌می‌کنیم، A روی محیط این‌دایره قراردارد. O مرکز نیمدایره فرض می‌شود، ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه OMC هریك نصف ضلعهای مثلث ABC است بنابراین دایره‌ای به قطر OC رسم می‌کنیم و از B دایره‌ای به شعاع میانهٔ BM را می‌کشیم محل برخورد آنها نقطهٔ M را مشخص می‌کند CM را امتداد می‌دهیم رأس A بدست می‌آید. (ش ۹۶)



شکل ۹۶

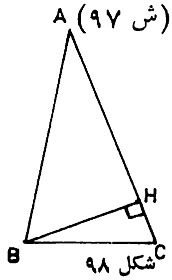
راه‌دیگرـ مثلث BMN را بامعلوم بودن سه‌ضلع می‌توان‌رسم‌کرد. (AO||MN) میانهٔ BM، MN مساوی $\frac{BC}{۴}$ و BN مساوی $\frac{۳BC}{۴}$، نقطه C درامتداد BN بدست می‌آید از C به M وصل‌کرده به‌اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم رأس A بدست می‌آید.



شکل ۹۷

۹۷ـ فرض‌کنیم مسئله حل شده باشد BA را تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم به قسمی که BD = BC شود DA تفاضل BC و BA می‌باشدکه مقداری است معلوم ومثلث BCD

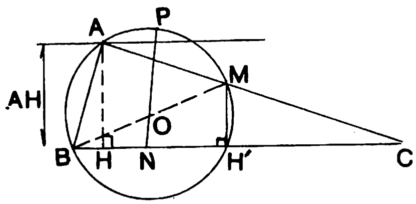
متساوی‌الساقین پس $\hat{D}=۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}$ یا $۲\hat{D}+\hat{B}+۱۸۰^\circ$ بنابراین برای رسم مثلث ABC ابتداء مثلث قائم‌الزاویه ADC را با معلوم‌بودن DA و زاویه D رسم می‌کنیم و $\widehat{DCB}$ را برابر زاویهٔ D می‌گیریم رأس B بدست می‌آید. (ش ۹۷)



شکل ۹۸

۹۸ مثلث قائم‌الزاویه BHC را با معلوم‌بودن BC و BH رسم می‌کنیم و از نقطهٔ B زاویه $\widehat{CBA}$ را برابر $\widehat{BCA}$ می‌سازیم. تا امتداد HC را در نقطهٔ A قطع کند. ABC مثلث مطلوب است. (ش ۹۸)

۹۹ــ مسئله را حل شده فرض‌کرده ومثلث قائم‌الزاویه ABC را مثلث مطلوب فرض می‌کنیم از نقطهٔ M وسط AC خطی موازی ارتفاع AH رسم می‌کنیم تا BC را درنقطه H' قطع کند $MH'=\frac{AH}{۲}$ می‌باشد. مثلث قائم‌الزاریه BMH' را با معلوم بودن وتر و ضلع MH' می‌توان رسم کرد، نقطه A بر روی دایره محیطی مثلث BMH' و از طرف دیگر روی خطی‌که با BC موازی و به فاصله AH ازآن باشد واقع است بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید:



شکل ۹۹ الف

مثلث قائم‌الزاویه $MH'B$ را با معلومات یك ضلع $\left(MH'=\frac{AH}{۲}\right)$ و وتر BM (میانه وارد بر ضلع AC) رسم کرده و دایره محیطی این مثلث را می‌کشیم، از یك نقطه دلخواه واقع بر BH' عمودی بر آن اخراج کرده و طول AH را ازاین نقطه براین عمود اخراج شده نقل می‌کنیم از انتهای پاره‌خط عمود، خط Δ را موازی با BH' رسم می‌کنیم نقطه برخورد Δ با دایرهٔ محیطی مثلث BMH'، رأس A از مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌باشد برای تعیین رأس C، نقطه A به M وصل‌کرده و امتداد می‌دهیم تا BH' را در نقطه C قطع‌کند ABC مثلث مطلوب است. (ش ۹۹)

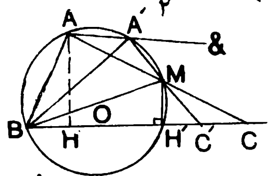
شرط امکان مسئله آن است که خط Δ دایره محیطی مثلث BMH' را قطع کرده و یا برآن مماس باشد.

$$AH \leqslant PN \Longrightarrow AH \leqslant PO + ON$$

$$AH \leqslant R + \frac{MH'}{۲} \Longrightarrow AH \leqslant R + \frac{AH}{۴}$$

$$\frac{۳}{۴} AH \leqslant R \Longrightarrow \frac{۳}{۴} AH \leqslant \frac{BM}{۲}$$

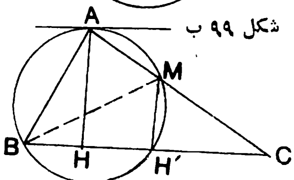
$$\frac{۲}{۲} AH \leqslant BM \Longrightarrow ۳h \leqslant ۲m_b$$



شکل ۹۹ ب

اگر $۳h \leqslant ۲m_b$ باشد خط Δ دایــره محیطی مثلث BMH' را در دونقطه A و A' قطع می‌کند و مسئله دوجواب دارد مثلث‌هـای ABC و $A'BC'$ (ش ۹۹ ب)

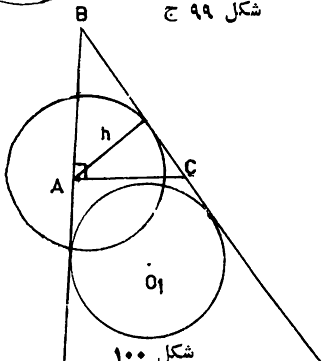
اگر $۳h = ۲m_b$ باشد مسئله یك جواب دارد (ش ۹۹ ج)



شکل ۹۹ ج

اگر $۳h > ۲m_b$ مسئله جواب ندارد.

۱۰۰ـ اگر BAC مثلث مطلوب بـاشد وتر BC بردایره به‌مرکز A وشعاع h (h اندازه ارتفاع‌وارد بر وتر) وهمچنین بردایره‌محاطی رأس B مماس است بنابرایـن مماس مشترك این دودایره وتر مثلث است. زاویه قائمه A را رسم کرده وبه‌مرکز A وشعاع h دایره‌ای رسم‌می‌کنیم و درزاویه مجاور A دایـره‌ای به شعاع معلوم $r_۱$ محاط می‌کنیم مماس مشترك این دو دایـره امتداد وتر و در نتیجه وتر مثلث را مشخص‌می‌کند و مثلث بدست می‌آید. (ش ۱۰۰)

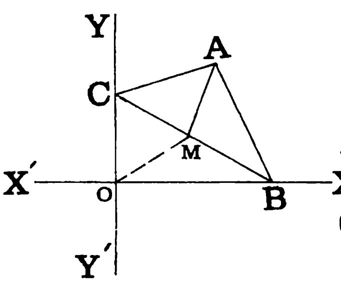


شکل ۱۰۰

۱۰۱ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد ونقطه M وسط وتر BC فرض شود

$$AM = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$

$$OM = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$



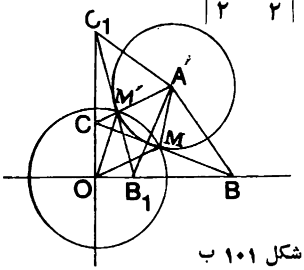
شکل ۱۰۱ الف

پس نقطه M برمحل تلاقی دودایره به‌مرکزهای

M و O و شعاع $\frac{a}{۲}$ واقع‌است. بنابراین راه ترسیم زیر بدست‌می‌آید دو دایره به‌مرکزهای O و A و شعاع $\frac{a}{۲}$ رسم مـی‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کند M وسط وتر BC است حال اگـر به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره دیگری رسم میکنیم تا محورها را در B و C و O قطع کند دو رأس B و C بدست می‌آید و مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۱۰۱)

شرط امکان مسئله آن است‌که دو دایره به مرکزهای A و O و به‌شعاع $\frac{a}{۲}$ یکدیگر را قطع‌کند و یا مماس باشند برای این منظور لازم است:

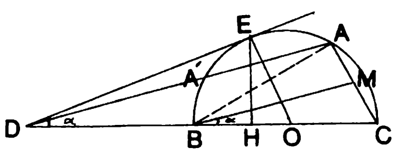
$$\left|\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}\right|<OA<\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\Longrightarrow OA<a$$



شکل ۱۰۱ ب

تعداد جوابها : اگر $OA<a$ باشد دو مثلث ABC و $AB_۱C_۱$ جوابهای مسئله‌اند واگر $OA=a$ باشد مسئله فقط یـك جواب دارد و اگر $OA>a$ باشد مسئله جواب ندارد.

۱۰۲ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، چون از رأس A خطی مـوازی میانه BM رسم کنیم. تـا امتداد BC را در نقطه D قطع‌کند $DC=۲BC$ می‌شود، بنابراین راه‌حل زیـر بدست می‌آید. به قطر $BC=a$ نیمدایره‌ای رسم‌کرده و قطر BC را از نقطه B به‌اندازه خود امتداد می‌دهیم تا نقطه D بدست‌آید از نقطه D خطی چنان رسم می‌کنیم که با DC زاویه α را تشکیل دهد محل تقاطع این خط با نیمدایره رأس‌مثلث مطلوب‌است.(ش۱۰۲)

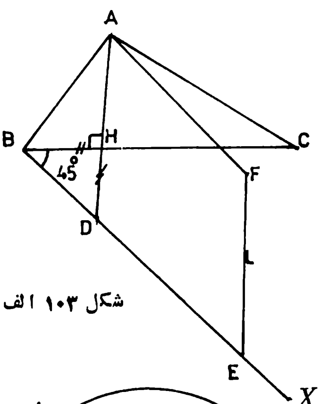


شکل ۱۰۲

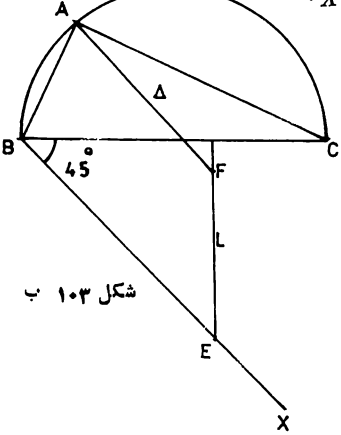
شرط امکان مسئله آن‌است که خط‌رسم‌شده دایره را قطع‌کند، اگر ازنقطه Dمماسی بر نیمدایره رسم‌کنیم. باید زاویه α کوچکتر از زاویه $\widehat{EDC}$ باشدو چون $\hat{\alpha}$ و $\widehat{EDC}$ هر دو

حاده‌اند پس باید $tg\,\alpha \leqslant tg\,\widehat{EDC}$ باشد اما :

$tg\,\widehat{EDC}=\frac{EH}{DH}$ و $OH\cdot OD=OE^{۲}$ و $OH=\frac{OE^{۲}}{OD}$ امـا OE مساوی با $\frac{a}{۲}$ و $OD=a+\frac{a}{۲}$ بنابراین $OH=\frac{a}{۶}$ و از آنجا $DH=a+\left(\frac{a}{۲}-\frac{a}{۶}\right)$ یعنی: $DH=\frac{۴a}{۳}$ و $EH^{۲}=BH\times HC$ ویا $EH^{۲}=\frac{a}{۳}\times\frac{۲a}{۳}$ یا $EH=\frac{a\sqrt{۲}}{۳}$ پس: $tg\,\alpha=\frac{EH}{DH}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ و لذا شرط امکان مسئله آن است که $tg\,\alpha\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد بایدتوجه داشت که AD نیمدایره را در دونقطه A و A' قطع می‌کند اما یکی از دو نقطه A یا A' در شرطهای مسئله صدق می‌کند (زاویه BM با وتر برابر α باید باشد) و بنابراین مسئله یك جواب دارد.

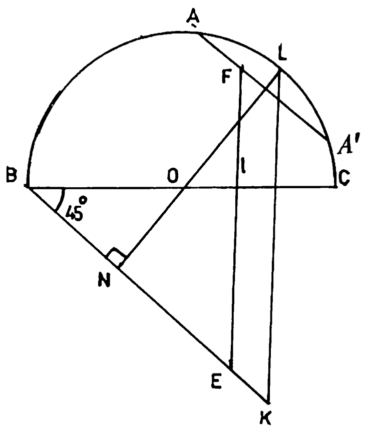


شکل ۱۰۳ الف



شکل ۱۰۳ ب

۱۰۳ــ اگـر مثلث قائم‌الزاویه ABC مثلث مطلوب باشد، اگر AH را تا نقطه D طوری امتداد دهیم‌که $HD=BH$ شود مثلث قائم‌الزاویه BHD متساوی‌الساقین‌و زاویه HBD مساوی با ۴۵° و AD مساوی با l است اگر از نقطه E عمودی بر BC فرود آورده و در روی‌آن طول $EF=l$ را نقل‌کنیم‌چهارضلعی $ADEF$ متـوازی‌الاضـلاع اسـت بنابــراین راه‌حل زیــر بدست می‌آید به قطر $BC=a$ نیمدایره‌ای رسم‌کرده و ازنقطه B خطی چنان رسم می‌کنیم کـه با BC زاویه ۴۵° تشکیل دهد. ازنقطه دلخواه E واقع بر BX عمودی بر BC فرودآورده و برروی آن از نقطه E طول $EF=l$ را جدامی‌کنیم ازF خطΔ را موازی BX رسم می‌کنیم تـا نیمدایره را در نقطه A قطع کند. A رأس زاویــه قائمه از مثلث ABC است. شرط امکان مسئله‌آن است که Δ نیمدایره را قطع‌کند. (ش ۱۰۳) یعنی



شکل ۱۰۳ ج

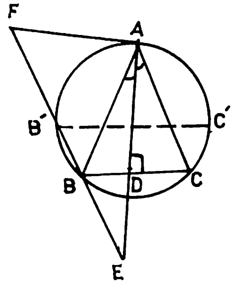
$l = AH + HD < BC \Longrightarrow l < a$. با شرط $l < a$، Δ نیمدایره را دریك نقطه قطع مـی‌کند و مسئله یك جواب دارد. اگر $l = a$ باشد نقطه A بر وسط کمان BC واقع است و مثلث متساوی الساقین ABC جواب مسئله است. اگر Δ نیمدایره را در دونقطه قطع کند مسئله دوجواب دارد. دراین حالت $EF = l > a$ و $EF < LK$ است. اگـر از O مـرکز دایره عمودی بر BE فرودآورده و محل تلاقی آن را با نیمدایره نقطه L بگیریم، LK وتر مثلث قائم الزاویه LKN می‌باشد و ملاحظه می‌شود که اگر $l = LK$ باشد چـون LN بر BN عمود است لذا خط Δ که از نقطه L موازی BE رسم می‌شود بر دایره مماس و نقطه A بر L منطبق است. LK وتر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین LNK می‌باشد و برای محاسبه آن ابتداء LN را حساب می‌کنیم

$LN = OL + ON$ اما $OL = \frac{a}{۲}$ و $ON = \frac{a}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بنابراین:

$$LK = \frac{a}{۲}(۱ + \sqrt{۲}) \text{ و } LK = \frac{\frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \text{ و } LN = \frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۲}}{۴}$$

و لذا دراین‌حالت باید $a < l < \frac{a}{۲}(۱ + \sqrt{۲})$ باشد.

۱۰۴ــ فرض می‌کنیم مسئله حـل شده و مثلث ABC به رأس A در دایـرهٔ مفروض محاط باشد به‌طوری‌که اگر AD ارتفاع نظیر BC باشند $AD + BC = L$ یا $AD + ۲BD = L$ حال AD را به‌طول $DE = BC$ امتداد داده ملاحظه می‌کنیم $AE = L$ و $۲BD = DE$ یا $\frac{BD}{DE} = \frac{۱}{۲}$ است. پس اگر EB را امتداددهیم تاخطی‌راکه از A بموازات BC رسم‌می‌شود

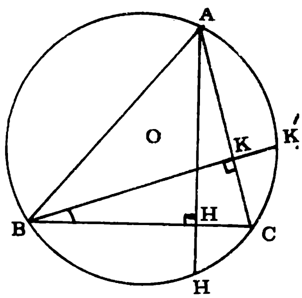


شکل ۱۰۴

در F قطع کند در مثلث متشابه EAF و EDB داریم:

$\frac{AF}{AE}=\frac{DB}{DE}=\frac{۱}{۲}$ و یا $AF=\frac{۱}{۲}AE$ بنابراین نتیجه می‌شود. از نقطه A واقع بر دایره و روی قطری که از این نقطه می‌گذرد طول $AE=L$ را جدا کرده سپس روی مماس A طول $AF=\frac{L}{۲}$ را جدا و EF را وصل می‌کنیم تا دایره را در B و B' قطع کند اگر وترهای BC و $B'C'$ را عمود بر AE رسم کنیم دومثلث ABC و $AB'C'$ که جوابهای مسئله‌اند بدست می‌آیند. برحسب آنکه خط EF دایره را در دونقطه یا یك نقطه قطع کند یا آنرا قطع نکند مسئله دارای دو یا یك جواب است و یا جواب ندارد. (ش ۱۰۴)

۱۰۵ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد،



شکل ۱۰۵ الف

$\widehat{CBK'}=\widehat{CAH'}$ است و درنتیجه نقطه C وسط کمان $K'H'$ می‌باشد بنابراین می‌توان مثلث را به ترتیب زیر رسم کرد.

از نقطه A (رأس داده شده مثلث) خطی‌موازی امتداد مفروض h_a رسم‌می‌کنیم تا محیط دایره را در نقطه H' قطع کند، با معلوم بودن نقطه K' بر محیط دایره (محل برخورد h_b با دایره) کمان $H'K'$ و درنتیجه نقطه C وسط آن‌مشخص‌می‌شود. از K' عمودی‌بر AC فرود می‌آوریم تا محیط دایره را در نقطه B قطع کند، B رأس سوم مثلث است زیرا ثابت می‌شود که $\widehat{H'HC}$، قائمه است

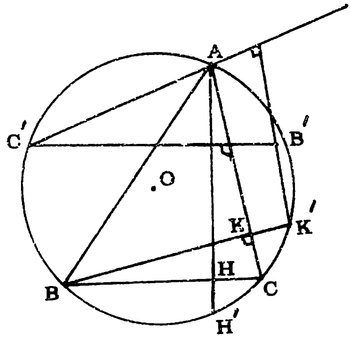
$$\widehat{BC}=\widehat{BH'}+\widehat{H'C} \text{ اما } \hat{K}=۹۰^\circ=\frac{\widehat{BC}+\widehat{AK'}}{۲} \text{ و } \hat{H}=\frac{\widehat{BH'}+\widehat{AC}}{۲}$$

و

$$\text{وچون } \hat{K}=۹۰^\circ=\frac{\widehat{BH'}+\widehat{K'C}+\widehat{AK'}}{۲} \text{ است و لذا } \widehat{H'C}=\widehat{K'C}$$

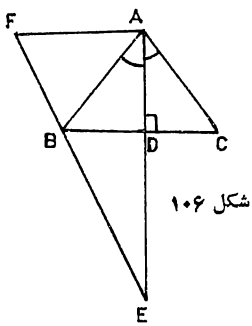
$$\widehat{AK'}+\widehat{K'C}=\widehat{AC}$$

است لذا $\frac{\widehat{BH'}+\widehat{AC}}{۲}=\hat{K}=۹۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{H}=۹۰^\circ$ است.



شکل ۱۰۵ ب

اگر نقطه C' را وسط کمان بزرگتر $H'K'$ انتخاب کنیم و از C' عمودی بر AH' رسم کنیم تا محیط دایره را در B' قطع کند B' رأس سوم مثلث ABC و یك جواب دیگر مسئله است «برای تعیین رأس B' ممکن است از K' عمودی بر AC' فرود آور تا محیط دایره را در B' قطع کند» مانند حالت قبل می‌توان ثابت کرد که $B'K'$ بر AC' عمود است.

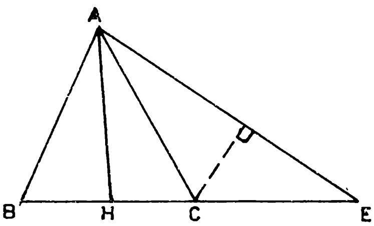


شکل ۱۰۶

۱۰۶ــ در مثلث ABC زاویهٔ A و مجموع $BC+AD=L$ معلوم است AD را به‌طول $DE=BC$ امتداد داده ملاحظه می‌شود که:
$DE=2BD$ و $AE=AD+DE=L$
حال EB را وصل کرده امتداد می‌دهیم تا خطی را که از A بموازات BC رسم می‌شود در F قطع نماید و داریم

$$\frac{AF}{AE}=\frac{DB}{DE}$$

وچون $\frac{DB}{DE}=\frac{1}{2}$ است پس $\frac{AF}{AE}=\frac{1}{2}$ واز آنجا $AF=\frac{AE}{2}=\frac{L}{2}$ می‌باشد.
بنابراین: زاویه XAy را مساوی A رسم کرده بر نیمساز آن طول $AE=L$ و بر خط عمود بر نیمساز از نقطهٔ A طول $AF=\frac{L}{2}$ را جدا کرده EF را وصل می‌کنیم تا ضلع AX را در B قطع کند. حال بر Ay نیز طول $AC=AB$ را جدا می‌کنیم مثلث ABC مشخص می‌شود. (ش ۱۰۶)

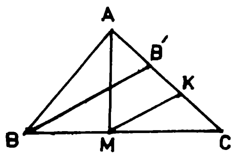


شکل ۱۰۷

۱۰۷ــ فرض کنیم مسئله حل شده باشد. CE را به‌اندازهٔ AC جدا می‌کنیم HE برابر نصف محیط مثلث است که مقداری است معلوم بنابراین راه‌حل مسئله چنین است که ابتداء مثلث قائم‌الزاویه AHE را با معلوم بودن

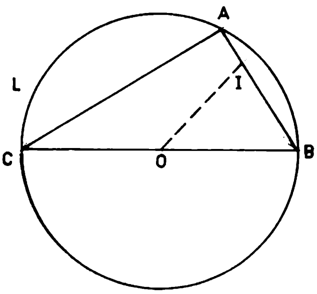
AH و HE رسم می‌کنیم چون مثلث ACE متساوی‌الساقین است پس نقطه C محل برخورد عمود منصف AE با HE می‌باشد و رأس B قرینه رأس C نسبت به نقطه H است. (ش ۱۰۷)

۱۰۸- از مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع AH و ارتفاع BB' معلوم‌اند. اگر از نقطه H خط HK را به موازات BB' رسم کنیم HK برابر $\frac{BB'}{۲}$ خواهد بود پس راه‌حل مسئله چنین است که ابتداء مثلث قائم‌الزاویه AHK را با معلوم بودن وتر AH و ضلع HK رسم می‌کنیم و امتداد AK خطی را که در H بر AH عمود می‌شود. در نقطه C قطع می‌کند. و رأس B قرینه رأس C نسبت به نقطه H است. (ش ۱۰۸)

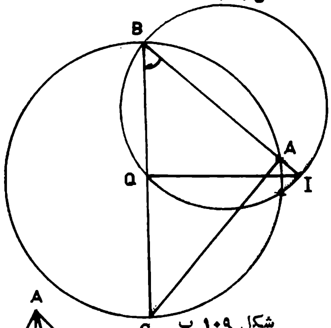


شکل ۱۰۸

۱۰۹- اگر ABC مثلث مطلوب باشد رأس B از این مثلث بر دایره مفروض (L) و بر کمان درخور زاویه B نظیر به وتر OI واقع است بنابراین دایره شامل کمان درخور زاویه B نظیر به وتر OI را رسم کرده و به مرکز O و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دایره و کمان درخور، رأس B را نشان می‌دهد. BI را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه A قطع کند و OB دایره را در نقطه C قطع می‌کند مثلث ABC مثلث مطلوب است. شرط امکان مسئله آن است که دایره محیطی مثلث با کمان درخور متقاطع یا مماس باشد اگر هر دو نقطه تقاطع بر روی کمان OBI از دایره شامل کمان درخور باشد مسئله دو جواب دارد. (ش ۱۰۹)

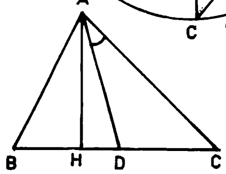


شکل ۱۰۹ الف



شکل ۱۰۹ ب

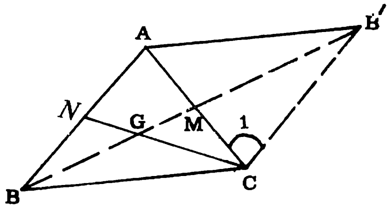
۱۱۰- ابتداء مثلث قائم‌الزاویه AHD را با با معلوم بودن AH و AD می‌سازیم سپس زاویه‌های $\widehat{DAC}$ و $\widehat{DAB}$ را برابر $\frac{\hat{A}}{۲}$



شکل ۱۱۰

رسم می‌کنیم ضلعهای آنها DH را در C و B رأسهای مثلث قطع می‌کنند. (ش ۱۱۰)

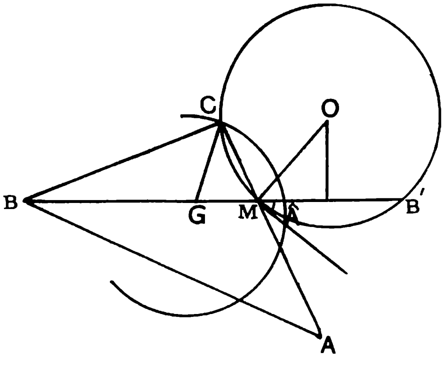
۱۱۱ـ اگر مسئله حل شده فرض شود و مثلث ABC مثلث مطلوب باشد، چون BM (میانه نظیر به‌ضلع AC) را تا نقطه B' به‌اندازه خود امتداد دهیم و از B' به A وصل کنیم چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه $\hat{C}_1=\hat{A}$ می‌باشد نقطه C بر کمان درخور زاویه $\hat{A}$ نظیر به وتر MB'



شکل ۱۱۱ الف

واقع بوده وهمچنین این نقطه بر محیط دایره‌ای به‌مرکز G وشعاع $GC=\frac{۲}{۳}CN$ (CN میانه نظیر ضلع AB) قراردارد بنابراین راه‌حل مسئله به‌ترتیب زیر بدست می‌آید.

پاره‌خط MB' را به‌اندازه میانه BM رسم کرده وکمان درخور زاویه A را نظیر به‌این وتر می‌کشیم، MB' را ازطرف M به‌اندازه $GM=\frac{۱}{۳}MB'$ امتداد داده و به مرکز G و شعاع $GC=\frac{۲}{۳}CN$ کمانی رسم می‌کنیم محل تلاقی این کمان با کمان درخور رسم شده رأس مطلوب C می‌باشد. C را به M وصل‌کرده و به‌اندازه خودش امتداد می‌دهم تا رأس A بدست آید برای تعیین رأس B، از نقطه M خط $M'B$ را به‌اندازه خود امتداد می‌دهم تا B بدست آید. مثلث ABC، مثلث مطلوب است.

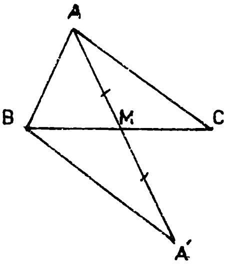


شکل ۱۱۱ ب

شرط وجود جواب آن است که دایره به مرکز G و شعاع $GC=\frac{۲}{۳}CN$ کمان درخور را قطع‌کرده و یا بر آن مماس باشد.

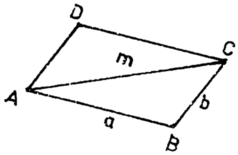
درحالتی‌که‌دایره (G و GC) کمان درخور را در دونقطه روی‌کمان MCB' قطع کند مسئله دوجواب متمایز دارد.

۱۱۲ـ حالت اول ــ دو ضلع AB و AC و میانهٔ AM معلوم است، AM را به اندازهٔ خود تا A' امتداد می‌دهیم، ازمثلث ABA' سه ضلع معلوم است، آن را رسم می‌کنیم. و سپس BM را به‌اندازهٔ خودش تا C امتداد می‌دهیم. (ش ۱۱۲)



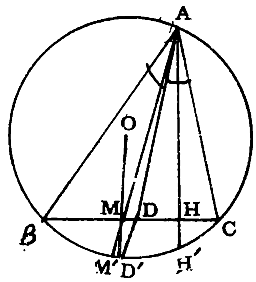
شکل ۱۱۲ الف

حالت دوم ــ دوضلع AB و AC ومیانهٔ BM معلوم است مثلث ABM را با معلوم بودن سه‌ضلع رسم می‌کنیم، پس‌از رسم‌مثلث، AM را به‌اندازهٔ‌خودش امتداد می‌دهیم تا رأس C بدست آید.



شکل ۱۱۲ب

۱۱۳ـ اگر ABC مثلث مطلوب و AH و AD و AM به‌ترتیب ارتفاع و نیمساز و میانه رسم شده از رأس A باشند، D' وسط کمان $\widehat{BC}$ و M وسط‌وتر BC ونقطه‌O مرکز دایره روی یك خط راست جای دارند و $OD' \parallel AH'$ است . AM' شعاع OD' را در نقطه M وسط ضلع BC قطع می‌کند بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.

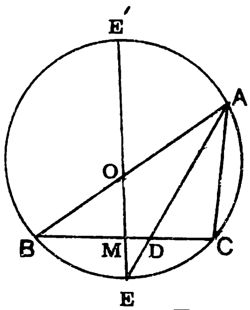


شکل ۱۱۳

دایره محیطی مثلث ABC با معلوم بودن سه نقطه H' و D' و M' مشخص می‌شود «این سه نقطه برروی یك خط راست واقع نمی‌باشند» مرکز این دایره نقطه O بدست می‌آید، O را به D' وصل کرده و از نقطه H' خطی موازی OD' می‌کشیم تا محیط دایره را در نقطه A قطع کند، A یك رأس ازمثلث است، A را به M' وصل کرده و نقطه تلاقی آن را با OD'، نقطه M می‌نامیم از M عمودی بر OD' اخراج می‌کنیم تا دایره را در C و B قطع کند، C و B دو رأس دیگر مثلث‌اند.

شرط امکان مسئله آن است‌که H' و D' و M' برروی یك خط راست نباشند و D' بین دونقطه H' و M' باشد و AH' موازی با OD' دایره را قطع کند برای این منظور لازم است مماس بر دایره در نقطه H' موازی با OD' نباشد.

۱۱۴ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد AD نیمساز زاویه A ازنقطه E وسط کمان $\widehat{BC}$

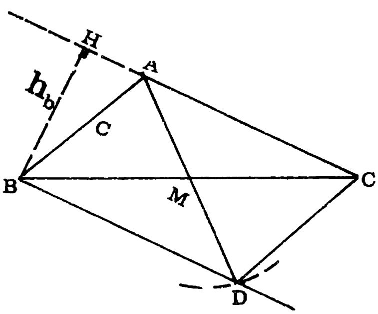


شکل ۱۱۴

می‌گذرد. عمودی که از نقطه E بر BC فرود می‌آید از وسط BC نقطه M و از وسط کمان $\widehat{BAC}$، نقطه E' می‌گذرد EE' قطر دایره محیطی مثلث ABC است، دو مثلث قائم‌الزاویه EAE' و EMD متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

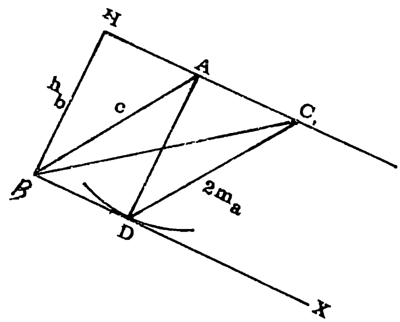
$$\frac{EM}{AE}=\frac{ED}{EE'} \quad \text{و یا} \quad EM \cdot EE' = AE \cdot ED$$

وچون $AD = EA - ED$ است لذا رسم مثلث به ترسیم دو پاره‌خط که تفاضل و حاصلضرب آنها معلوم است منجر می‌شود «دو پاره‌خط EA و ED» حل این مسئله در آغاز مسئله‌های این کتاب آمده است[1] (ش ۱۱۴)



شکل ۱۱۵ الف

۱۱۵ــ اگر مسئله حل‌شده فرض شود و ABC مثلث مطلوب باشد. مثلث قائم‌الزاویه ABH را با معلوم بودن اندازه وتر C وضلع $BH = h_b$ رسم می‌کنیم. از نقطه B خطی موازی AH رسم کرده و دایره‌ای به مرکز A و شعاع $R = ۲m_a$ می‌کشیم تا خط رسم شده از نقطه B وموازی AH را قطع کند، نقطه D بدست می‌آید، از نقطه D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا AH را در نقطه C قطع کند C رأس سوم مثلث است.



شکل ۱۱۵ب

بحث ــ اولا لازم است که $h_b \leqslant c$ باشد.

I ــ با فرض اینکه $h_b < c$ باشد.

الف ــ اگر $۲m_a = h_b$ باشد مسئله تنها یك جواب دارد. (ش ۱۱۵ الف)

«دایره به‌مرکز A وشعاع $۲m_a$ بر خط Bx در نقطه D مماس است»

ب ــ اگر $۲m_a = c$ باشد($۲m_a = c \geqslant h_b$) مسئله تنها یك جواب دارد. (ش ۱۱۵ ب)

---

۱ ــ مسئله شماره ۱۳ بخش اول از فصل دوم.

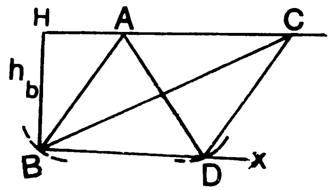
«دایره به مرکز A و شعاع $2m_a$، خط xB را در نقطه‌های D و B قطع می‌کند»

ج ـ اگر $2m_a<h_b$ باشد مسئله جواب ندارد.

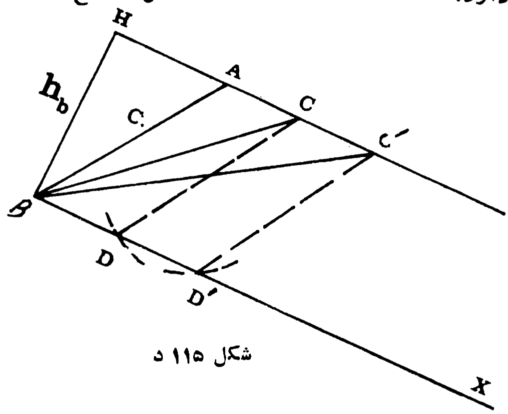
د ـ اگر $2m_a>h_b$ باشد «چون $c>h_b$ است حالتی که $2m_a=c>h_b$ می‌باشد قبلاً بحث شده و در این حالت $2m_a\neq c$ فرض می‌شود» مسئله دو جواب متمایز دارد.

«دایره به مرکز A و شعاع $2m_a$ خط Bx را در دو نقطه D و D' قطع می‌کند».

در شکل ۱۱۵ ج $h_b<2m_a<c$ فرض شده است

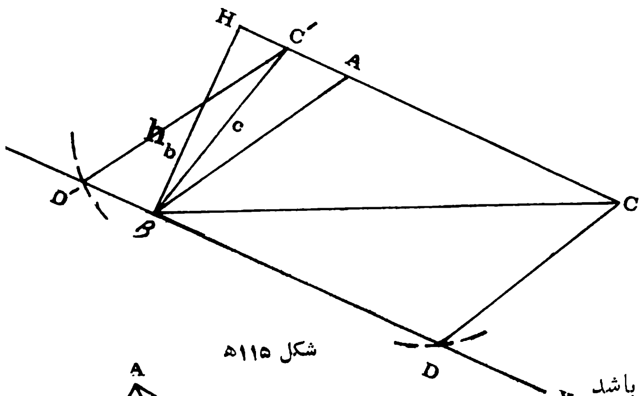


شکل ۱۱۵ ج



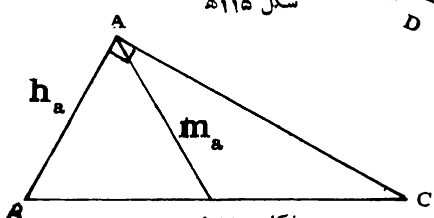
شکل ۱۱۵ د

در شکل ۱۱۵ د $h_b<c<2m_a$ می‌باشد

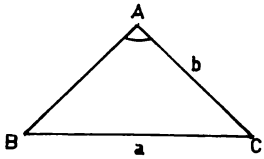


شکل ۱۱۵ه

II با فرض اینکه $h_b=c$ باشد در این حالت مثلث ABC در رأس A قائمه است و در اینصورت باید $2m_a=a$ باشد (میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه) و مسئله فقط یك جواب دارد.

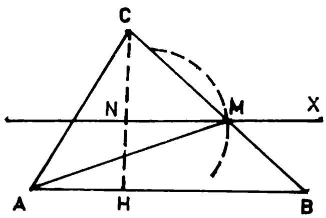


شکل ۱۱۵ ز



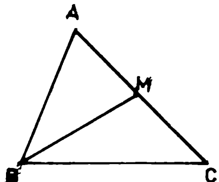
شکل ۱۱۶

۱۱۶ـ ابتداء زاویهٔ A را می‌سازیم و روی یکـی از ضلعهایش AC را بـرابر b جـدا مـی‌کنیم به مرکز C و شعاع a کمانـی رسم می‌کنیم کـه ضلع دیگر زاویـه را در B قطع کند. چون $a>b$ می‌باشد دایرهٔ به مرکز C و به‌شعاع a نمی‌تواند ضلع دیگر زاویه A را در دو نقطه‌ای‌کـه یك‌طرف A واقع باشند قطع‌کند، زیرا دراین صورت نتیجه خواهد شدکه $a<b$ است‌که برخلاف فرض است و بنابراین مسئله یك جواب دارد. (ش۱۱۶)



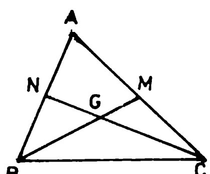
شکل ۱۱۷

۱۱۷ـ ابتداء ضلع AB وبعدارتفاع CH را رسم‌می‌کنیم ازوسط ارتفاع خط x راموازی AB و به مرکز A و شعاع میانه دایره‌ای را رسم می‌کنیم تـا M بدست‌آید از B به M وصل کـرده و آن را تـا نقطه C بطوری‌که مساویBM شود امتدادمی‌دهیم مثلث ABC بدست می‌آید. (ش ۱۱۷)



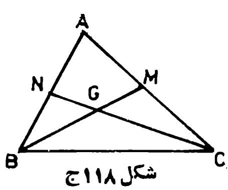
شکل۱۱۸الف

۱۱۸ـ حالت اول ـ دومیانه BM و CN و BC معلوم‌است.اگرG نقطهٔ تلاقی میانه‌ها باشد می‌دانیم$BG=\frac{2}{3}BM$ و $CG=\frac{2}{3}CN$ واز مثلث BGC سه ضلع معلوم است آنرا رسم می‌کنیم و CG و BG به‌اندازه نصف خود تا نقطه‌هـای N و M امتداد مـی‌دهیم. BN و CMیکدیگررا در A قطع‌می‌کنند.(ش۱۱۸)



شکل ۱۱۸ ب

حالت‌دوم‌ـ دومیانهٔ BM و CN وضلع AB معلوم است: دراینجا مثلث GBN را با معلوم بودن سه ضلع می‌توان رسم‌کرد. پس از رسم ایـن مثلث NGرا به اندازهٔ دوبرابر خود و BN را بـه اندازه خود امتداد مـی‌دهیم تـا رأس‌های C و A بدست آیند.

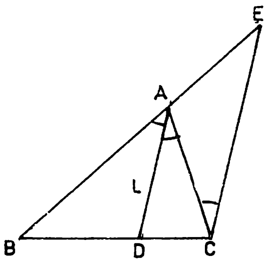


شکل۱۱۸ج

۱۱۹ـ مسئله را حل شده فرض‌کـرده CE را موازی بـا نیمساز AD رسم می‌کنیم داریم:

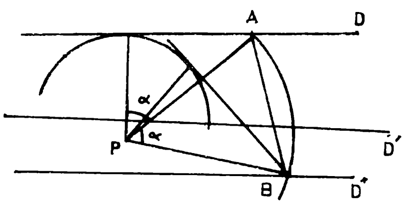
$\hat{E}=\hat{A}_1$ و $\hat{C}_1=\hat{A}_1$ یعنی مثلث ACE متساوی‌الساقین است و $AE=b$ می‌باشد و از طرفی داریم:

$$\frac{c}{c+b}=\frac{L}{EC} \text{ و } \frac{BA}{BE}=\frac{AD}{EC}$$



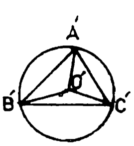
شکل ۱۱۹

پس EC چهارمین جزو تناسب ما بین c و $c+b$ و L است و می‌توان آنرا رسم کرد پس از تعیین آن می‌توان مثلث متساوی‌الساقین ACE راکه ضلعهایش معلومند رسم کرده EA را به‌طول $AB=C$ امتداد داد تامثلث ABC بدست آید (ش ۱۱۹) برای آنکه مسئله ممکن باشد بایدبتوانیم‌مثلث ABC را رسم کنیم یعنی باید داشته باشیم $EC<۲b$ اما $EC=\frac{L(c+b)}{c}$ بنا براین باید $\frac{L(c+b)}{c}<۲b$ یا $L(c+b)<۲bc$ باشد که چون دوطرف را بر $۲bcL$ تقسیم کنیم حاصل می‌شود: $\frac{۱}{L}<\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$ که شرط امکان مسئله است.

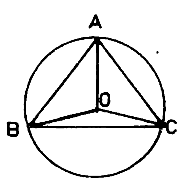


شکل ۱۲۰

۱۲۰ــ اگر PAB مثلث مطلوب باشد، نقطه B متناظر نقطهٔ A دردوران(α و P) است. پس مکان B اولا ــ خط D' است ثانیاً خط D'' می‌باشدکه از دوران D حول P بهزاویهٔ α بدست می‌آید بنا براین خط D را حول نقطه p بهزاریه α دوران‌می‌دهیم تا به‌وضع D'' درآید نقطه تلاقی D' و D''، رأس B می‌باشد به مرکز P و شعاع PB دایره‌ای رسم می‌کنیم نقطه تلاقی این‌دایره با D رأس A می‌باشد. اگر دوران را در جهت دیگری انجام دهیم، جواب دیگری بدست می‌آید. (ش ۱۲۰)



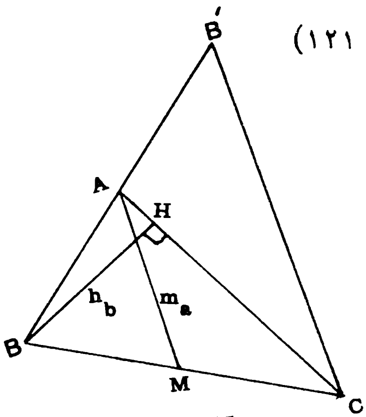
شکل ۱۲۱ الف



شکل ۱۲۱ ب

۱۲۱ــ مثلث $A'B'C'$ را چنان می‌سازیم که هر ضلعش بموازات یکی از امتدادهای مفروض باشد. دایرهٔ محیطی آنرا رسم می‌کنیم. سپس از O مرکز دایرهٔ مفروض OA و OB و OC را بموازات OA' و OB' و OC'

می‌کشیم، مثلث ABC جواب مسئله است. (ش ۱۲۱)

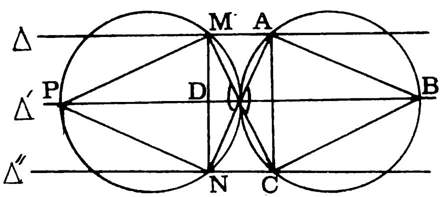


شکل ۱۲۲

۱۲۲ــ اگر ABC مثلث‌مطلوب باشد. ازمثلث قائم‌الزاویه AHC وتر و یك ضلع معلوم است اگر B' قرینه B نسبت به‌نقطه A باشد $B'C=2AM=2m_a$ است بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید.

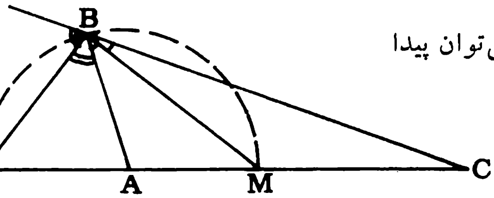
مثلث قائم‌الزاویه AHB را با داشتن وتر و و یك‌ضلع رسم کرده و قرینه نقطه B را نسبت به A تعیین می‌کنیم B' بدست می‌آید رأس C از طرفی بر امتداد AH واقع است و ازطرف دیگر بر دایره‌ای به مرکز B' و شعاع $2m_a$ قراردارد. (ش ۱۲۲) محل تلاقی AH و دایره (B' و $2m_a$) نقطه C را می‌دهد شرط امکان مسئله آن است‌که $h_a<C$ باشد.

۱۲۳ــ اگرمسئله حل شده فرض شود ومثلث ABC مثلث مطلوب باشد، دایرهٔمحیطی مثلث‌را رسم می‌کنیم تا خط Δ' را در نقطه دیگری‌مانند D قطع‌کند. دایرهٔ محیطی ADC همان دایره محیطی مثلث ABC می‌باشد و هریك‌از زاویه‌های $\widehat{ADB}$ و $\widehat{BDC}$ مساوی 60° می‌باشند بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. از نقطه دلخواهی مانند D واقع بر Δ' دوخط در دوطرف Δ' طوری‌رسم‌می‌کنیم که با Δ' زاویه 60° بسازند این دوخط به‌ترتیب Δ و Δ'' را در A و C قطع می‌کنند دایره محیطی مثلث ADC را رسم‌کرده نقطه تلاقی آن را با Δ'، B می‌گذاریم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع بود، و رأس‌های آن بر سه خط متوازی داده شده قرار دارند بنابراین مثلث مطلوب می‌باشد. اگر دایره محیطی مثلث MDN را رسم‌کنیم تا Δ' درنقطه P قطع‌کند مثلث متساوی‌الاضلاع MNP بدست می‌آید که دارای همان ویژگیهای مثلث ABC می‌باشد. دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و MNP باهم مساوی فقط جای رأس‌های دو مثلث بر روی خطهای Δ و Δ' و Δ'' متفاوت می‌باشد. (ش ۱۲۳)



شکل ۱۲۳

۱۲۴ـ نیمساز داخلی BM را رسم کرده و نسبت $\frac{MA}{MC}=\frac{AB}{BC}$ برقرار است. روی AC یك نقطهٔ دیگر هم مانند N می‌توان پیدا کرد که دارای این تناسب باشد

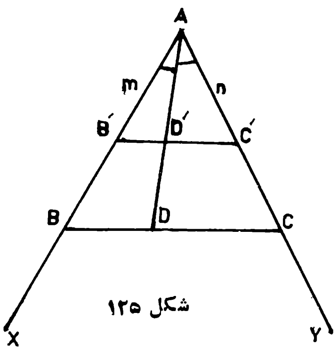


$$\frac{MA}{MC}=\frac{AB}{BC}=\frac{NA}{NC}$$

شکل ۱۲۴

این نقطه پای نیمساز خارجی زاویه B است. $\widehat{MBN}$ قـائمه اسـت بنابرایـن پس از رسم AC و نقطـه M، نقطه N را بطوریکه $\frac{NA}{NC}=\frac{MA}{MC}$ باشد پیدا کرده دایره‌ای به‌قطر MN رسم می‌کنیم. رأس B روی این‌دایره است بعد به مرکز N و شعاع نیمساز دایـره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ اولی را قطع کند. محل تقاطع رأس B است. (ش ۱۲۴)

۱۲۵ـ مسئله‌را حل‌شده فرض می‌کنیم درمثلث ABC طول‌های $AB'=m$ و $AC'=n$ را بـر ضلعهای AB و AC جـدا می‌کنیم



شکل ۱۲۵

به‌فرض دایم: $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$ پس:

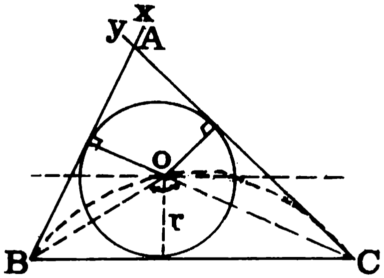
$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$ یعنی $B'C'$ بـا BC موازی است بنابراین روی ضلعهای زاویه معلوم $X\hat{A}y=\hat{A}$ طول‌های $AB'=m$ و $AC'=n$ و بر نیمساز این زاویه $AD=L$ را جـدا کرده از D خط BC را مـوازی $B'C'$ رسم می‌کنیم، مثلث ABC بدست‌آید. (ش ۱۲۵)

۱۲۶ـ ابتداء مثلث OBC را رسم‌می‌کنیم از این ملثث زاویهٔ رأس:

$$\widehat{BOC}=۱۸۰^\circ-\left(\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}\right)=۱۸۰^\circ-\left(۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}\right)=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$$

طول BC و ارتفاع آن (شعاع دایره محاطی) معلوم است. ضلع BC را رسم می‌کنیم و

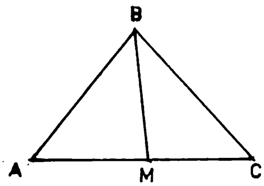
بعد خطی موازی BC به‌فاصلهٔ r از آن می‌کشیم و سپس کمان درخور BC مقابل به زاویه $\left(۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}\right)$ را رسم می‌کنیم تا خط را در O قطع کند. زاویه‌های $\widehat{CBO}$ و $\widehat{BCO}$ را دوبرابر می‌کنیم تا زاویه‌های $\widehat{CBX}$ و $\widehat{BCy}$ بدست آید نقطه برخورد Bx و Cy رأس A را نشان می‌دهد. (ش ۱۲۶)



شکل ۱۲۶

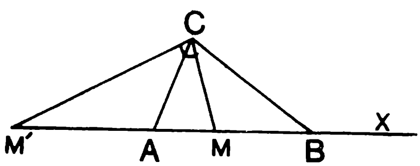
۱۲۷– اگر مثلث ABC مثلث مطلوب باشد میانه BM و ضلع AC و زاویه C در دست است، M وسط AC و $MC=\frac{AC}{۲}$ است.

بنابراین از مثلث BMC دوضلع و زاویه روبرو به یکی از آنها معلوم است مسئله منجر به رسم مثلثی با معلوم بودن دوضلع و زاویه روبرو به یکی از آنها می‌شود که این مسئله در حل مثلث‌ـ حالت چهارم با توضیح کامل حل و بحث شده است (ش ۱۲۷)



شکل ۱۲۷

۱۲۸– داریم: $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}=K$ ازاین تناسب که سه نقطهٔ M و A و M' در دست است نقطهٔ B بدست می‌آید. رأس C روی دایره به‌قطر MM' واقع است بنابراین اگر یکی ازضلعهای BC یا AC یا یکی از زاویه‌های $\hat{B}$ و یا $\hat{A}$ معلوم باشد با در دست داشتن نیمساز CM و یا ارتفاع و یا میانهٔ مربوط به رأس C می‌توان رأس C را بدست آورد. (ش ۱۲۸)



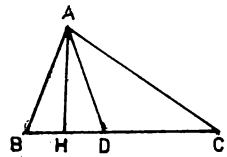
شکل ۱۲۸

۱۲۹– می‌دانیم زاویه مابین ارتفاع AH و نیمساز AD برابراست با $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ (۱)

۱– $\hat{B}=۹۰^\circ-\widehat{HAB}=۹۰-\left(\frac{\hat{A}}{۲}-\alpha\right)$

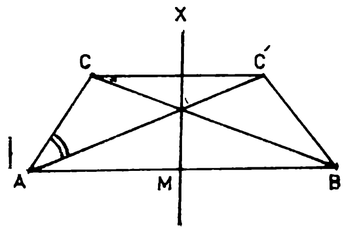
←

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه AHD را با معلوم بودن وتر AD و یک‌زاویهٔ حاده می‌توان‌رسم کرد. وسپس در دوطرف AD دوزاویه‌برابر $\frac{\hat{A}}{2}$ که مقداری است معلوم مـی‌سازیم کـه ضلعهای‌آنها DH را در B و C قطع‌می‌کنند. (ش ۱۲۹)

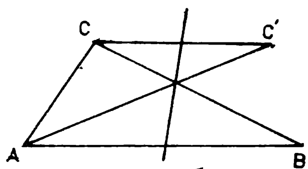


شکل ۱۲۹ الف

۱۳۰– اگر ABC مثلث مطلوب باشد، قرینه آن نسبت Mx (عمـود منصف AB) مثلـث ABC' اسـت، $\widehat{C'AC}=\hat{A}-\hat{B}$ اسـت بنابراین‌مثلث ACC' را بامعلوم‌بودن‌دوضلع و زاویه بین آنها مـی‌توان رسم‌کرد. پس از رسم این‌مثلث‌می‌توان با رسم‌عمود منصف CC' وتعیین‌قرینه نقطه A نسبت به‌آن مثلث ABC را بدست‌آورد. (ش ۱۳۰)



شکل ۱۳۰ الف



شکل ۱۳۰ ب

۱۳۱– ازرابطه $a+b-c=K$ نتیجه‌می‌شود $2p=k+2c$ و یا $\frac{k}{2}=p-c$.

اگر ABC مثلث مطلوب باشد.

→

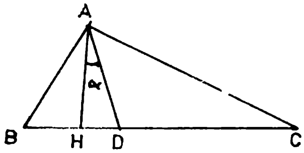
$$\hat{C}=90^\circ-\widehat{HAC}=90^\circ-\left(\frac{\hat{A}}{2}+\alpha\right)$$

از تفریق دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\hat{B}-\hat{C}=2\alpha$$

و یا

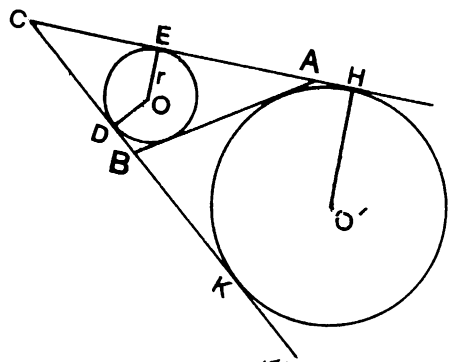
$$\alpha=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$



شکل ۱۲۹ ب

در این مثلث $B>C$ فرض شده است و بطورکلی رابطه را به‌صورت $\alpha=\left|\frac{B-C}{2}\right|$ می‌نویسند.

$$CE=CD=p-c=\frac{k}{۲}$$

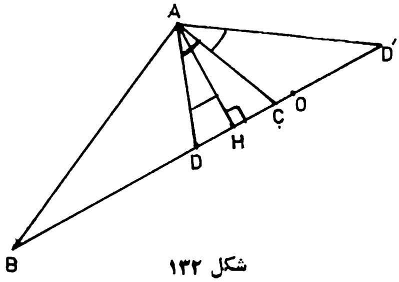


شکل ۱۳۱

نقطه‌های D و E نقطه‌های تماس دایره محاطی می‌باشد، لذا دایره محاطی داخلی را می‌توان رسم کرد. و بدین ترتیب r بدست می‌آید از رابطه $p=\frac{S}{r}$ می‌توان p را بدست آورد. حال قطعه $CK=CH=p$ را بر ضلع‌های زاویه C نقل می‌کنیم نقطه‌های H و K نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی ضلع C با ضلعهای زاویه C می‌باشد. مماس مشترك داخلی دو دایره رأس‌های A و B را می‌دهد. (ش ۱۲۱) شرط امکان مسئله آن است که دو دایره رسم شده متخارج یا مماس خارج باشند. $oo' \geqslant r+r_۱$

مسئله ممکن است دارای دوجواب (وقتی که دودایره متخارج باشند، دارای دومماس مشترك داخلی هستند) ویا یك جواب (دو دایره مماس خارج) باشد. یا جواب نداشته باشد (دو دایره متقاطع)

۱۳۲- اگر ABC مثلث مطلوب باشد. AH ارتفاع وارد بر ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است $\widehat{DAH}=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$[۱]



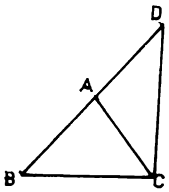
شکل ۱۳۲

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه ADH را با معلومات $AH=h$ و $\widehat{DAH}=\frac{\alpha}{۲}$ رسم می‌شود. اگر از نقطه A عمودی بر AD اخراج کنیم تا امتداد BC را در نقطه D' قطع کند AD' نیمساز زاویهٔ خارجی رأس A می‌باشد. (ش ۱۳۲)

اگر O وسط DD' باشد می‌توان نوشت $OD^۲=OB\ .\ OC$ «رابطه نیوتون در

۱- اگر α زاویه بین ارتفاع ونیمساز رسم شده از یك رأس مثلث باشد، این زاویه نصف تفاضل دو زاویه دیگر است. اثبات این مطلب در ضمن حل مسئله ۱۲۹ آمده است.

تقسیم توافقی» و از طرفی $OB - OC = a$ لذا رسم مثلث با ترسیم دوپاره‌خط که تفاضل و حاصلضرب آنها معلوم است میسر می‌شود. «رسم دوپاره‌خطی که تفاضل و حاصلضرب آنها معلوم باشد در حل مسئله ۱۳ آمده است.»

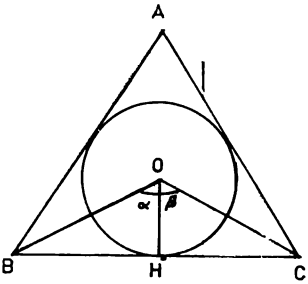


شکل ۱۳۳

۱۳۳ـ فرض کنیم مسئله حل شده باشد AB را تا نقطهٔ D به‌اندازهٔ AC امتداد می‌دهیم مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

$\hat{A} = ۲\hat{D}$ پس $\hat{D} = \frac{۱}{۲}\hat{A}$ یا $\hat{D} = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B} - \hat{C})$

و $BD = K$. بنا بر این راه‌حل مسئله چنین‌است: BD را برابر K رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B و D زاویه‌های $\hat{B}$ و $\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B} - \hat{C})$ را می‌سازیم. محل تلاقی ضلعهای دیگر این زاویه‌ها رأس C است. (ش ۱۳۳)



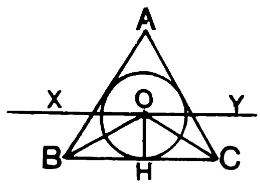
شکل ۱۳۴

۱۳۴ـ دایرهٔ محاطی را رسم می‌کنیم و شعاع OH را از آن می‌کشیم و از نقطهٔ H مماس بر دایره را رسم می‌کنیم و زاویه‌های α و β را به‌ترتیب برابر $\frac{\pi}{۲} - \frac{B}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲} - \frac{C}{۲}$ جدا می‌کنیم تا مماس مذکور را در B و C قطع کنند از B و C مماس‌هائی بر دایره می‌کشیم، نقطهٔ برخورد آنها رأس A از مثلث ABC است. (ش ۱۳۴)

۱۳۵ـ زاویهٔ $\widehat{BOC}$ برابر است با $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ پس راه‌حل مسئله چنین‌است ضلع BC را رسم می‌کنیم و برروی آن کمان درخور $۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ [1] را می‌سازیم و خط XX' را بموازات BC و به‌فاصله r از آن‌می‌کشیم، محل برخورد XX' و کمان‌مذکور نقطهٔ O مرکز

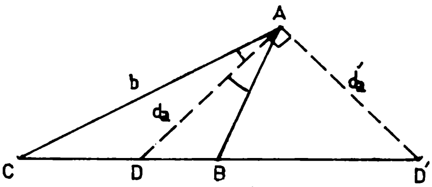
$$\widehat{BOC} = ۱۸۰^\circ - \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲}\right)$$

$$\widehat{BOC} = ۱۸۰^\circ - \left(۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}\right) = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$



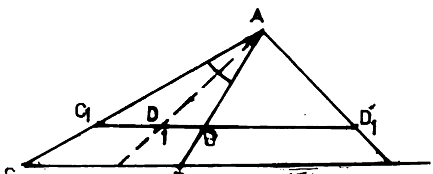
شکل ۱۳۵

دایره محاطی است به مرکز O و بـه‌شعاع r دایرۀ محاطی‌را رسم کرده واز B و C دومماس بر آن می کشیم. محل برخورد این دومماس، A رأس سوم مثلث است. (ش ۱۳۵)



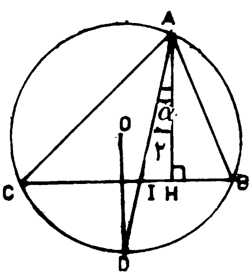
شکل ۱۳۶ الف

۱۳۶ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد. d_a و d'_a برهم عمودند و $m=\frac{da}{d'a}$ می‌باشد و $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}=\frac{\hat{A}}{۲}$ است بنابراین می‌توان مسئله‌را به‌طریق‌زیرحل کرد. مثلث قائم‌الزاویه DAD'، قائمه‌در رأس A و $AD_۱=mAD'_۱$ را رسم کرده و بردوطرف ضلع AD از نقطه A دو زاویه مساوی با $\frac{\hat{A}}{۲}$ را طرح می‌کنیم مثلث $AB_۱C_۱$ متشابه با مثلث مطلوب است. روی ضلع $AC_۱$ ازنقطه A پاره‌خطی به‌اندازه b نقل می‌کنیم تا نقطه C بدست آیـد از C خطی مـوازی $C_۱B_۱$ رسم مـی‌کنیم تا $AB_۱$ را در نقطه B قطع کند ABC مثلث مطلوب است. (ش ۱۳۶)



شکل ۱۳۶ ب

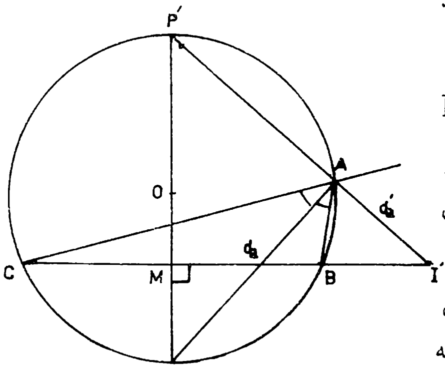
۱۳۷ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، زاویه بین نیمساز وارتفاع وارد ازیك رأس مساوی بـا نصف تفاضل دو زاویه دیگر است یعنی: $\widehat{HAI}=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=\frac{\alpha}{۲}$ [1] نقطه D وسط کمان BC می‌باشد و $\widehat{ODI}=\widehat{HAI}$، (O مرکز دایــره و AH ارتفاع و AI نیمساز است) بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.



شکل ۱۳۷

۱ــ اثبات این مطلب در ضمن مسئله ۱۲۹ آمده است.

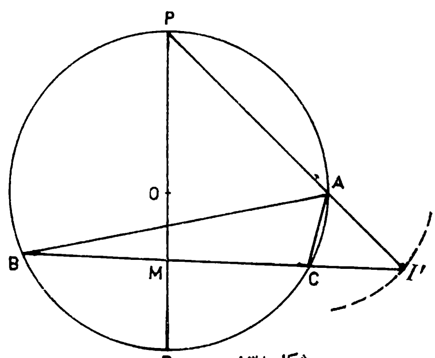
دایره‌ای به‌شعاع R رسم‌کرده و یك‌شعاع اختیاری مانند OD می‌کشیم برضلع OD زاویه $\widehat{ODA} = \frac{\alpha}{۲}$ را طرح می‌کنیم محل تلاقی این‌ضلع با دایره رأس A می‌باشد طول $AI = d$ را از نقطه A بر AD نقل‌کرده و از نقطه I عمودی بــر OD فرود می‌آوریم امتداد این عمود دایرهٔ را در دو نقطه B و C قطع مــی‌کند ABC مثلث مطلوب است . (ش ۱۳۷)



شکل ۱۳۸ الف

۱۳۸ــ اگــر مثلث ABC مثلث مطلوب باشد امتداد d_a از وسط‌کمانی حاوی زاویه A بـا وتر BC می‌گذرد و چون زاویه‌های $\widehat{PMB}$ و $\widehat{PAI'}$ هردو قائمه‌اند لذا بر چهارنقطه A و I' و M و P یك دایره می‌گذرد و می‌توان نوشت: (ش ۱۳۸)

و چــون $P'A \cdot P'I' = P'P \cdot P'M$ معلوم است لذا حل مسئله $P'I' - P'A = d'_a$ منجر به‌تعیین طول‌های $P'A$ و $P'I'$ می‌شود که تفاضل و حاصلضرب آنها معلوم مــی‌باشد و می‌توان آنها را رسم کرد. بنابراین طریق زیر برای رسم مثلث بدست می‌آید.



شکل ۱۳۸ ب

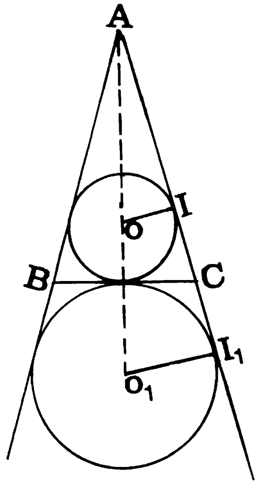
ابتداء دایــره حــاوی زاویــه A نظیر به‌وتر $BC = a$ را رسم کــرده و از نقطه P وسط کمان BC عمود PM را بر BC فرودمی‌آوریم انــدازه‌های PP' و PM مشخص مــی‌شود. حال دوقطعه خط‌که تفاضلشان d و حاصلضرب آنها $P'P \cdot P'M$ مــی‌باشد رسم مــی‌کنیم . (حــل این مسئله در مسئله ۱۳ آمده است) با بدست‌آوردن اندازه‌های این دوپاره‌خط به مرکز P' و شعاع $P'I'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم نقطه تلاقی ایــن دایره با امتداد BC، نقطه I' (محل تلاقی نیمساز خــارجی با ضلع BC) است. $P'I'$ محیط دایره O را در A قطع می‌کند. ABC مثلث مطلوب است.

۱۳۹ــ ایــن مسئله حالت خاصی از مسئله زیراست: ازمثلثی محیط و یك‌ضلع و زاویه مقابل

به این ضلع داده شده مثلث را رسم کند اگر ABC مثلث مطلوب باشد

$$AI = p - a = \frac{۳a}{۲} - a = \frac{a}{۲}$$

$$AI_۱ = p = \frac{۳a}{۲}$$

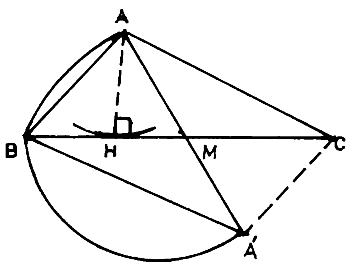


شکل ۱۳۹

برای رسم مثلث:

ابتداء زاویه A را رسم کرده $AI = \frac{a}{۲}$ و $AI_۱ = \frac{۳a}{۲}$ را از نقطه A بر روی یك ضلع آن نقل می‌کنیم نیمساز زاویه A را رسم‌کرد واز نقطه‌های I و $I_۱$ عمودهایی بر $AI_۱$ اخراج می‌کنیم تا نیمساز را در O و $O_۱$ مرکزهای دایره‌ای محاطی داخلی ومحاطی خارجی نظیر ضلع a قطع‌کند BC مماس مشترك دو دایره O و $O_۱$ است با رسم این مماس مشترك مثلث مشخص می‌شود (ش ۱۳۹) شرط امکان مسئله آن است‌که دایره‌های O و $O_۱$ متخارج و یا مماس خارج باشد.

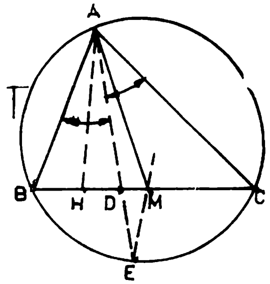
۱۴۰ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، AM را به‌اندازه خود تا نقطه A' امتداد می‌دهیم چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع و در نتیجه زاویه ABA' مکمل زاویه A می‌باشد نقطه B بر کمانی از دایره حاوی $۱۸۰° - \hat{A}$ که شامل وتر $AA' = ۲AM$ است قرار دارد و از طرف دیگر بر مماس MB که از نقطه M بر دایره‌ای به مرکز A وشعاع $AH = h$ رسم می‌شود واقع‌است‌بنابراین برای‌رسم مثلث ابتداء مثلث قائم‌الزاویه AHM را با معلوم بودن وتر ویك‌ضلع رسم‌کرده و AM را تا نقطه A' امتداد می‌دهیم بطوری‌که $AM = A'M$ باشد دایره کمان حاوی $۱۸۰° - \hat{A}$ رابرای وتر AA' رسم می‌کنیم و به مرکز A و شعاع AH دایره‌ای رسم کرده و از M مماسی بر آن می‌کشیم نقطه تلاقی این مماس باکمان حاوی مذکور رأس B می‌باشد با امتداد دادن BM تا نقطه C بطوری‌که $BM = MC$ باشد مثلث رسم می‌شود. (ش ۱۴۰) شرط امکان مسئله آن‌است



شکل ۱۴۰

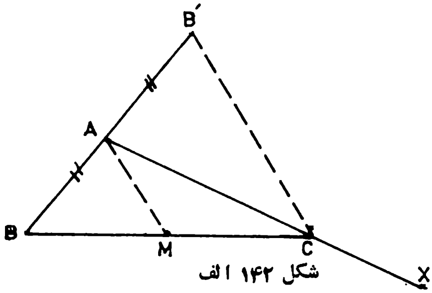
که $AH<AM$ باشد.

۱۴۱– اگر ABC مثلث مطلوب باشد امتداد AD (نیمساز $\hat{A}$) کمان BC را در نقطه E که وسط این کمان است قطع می‌کند. اگر از نقطه M وسط وتر BC عمودی بر BC اخراج شود این عمود از نقطه E و از مرکز دایره می‌گذرد. چون AE وتری از دایره محیطی مثلث ABC است عمود منصف این وتر از مرکز دایرهٔ می‌گذرد و بنا بر این مثلث قائم‌الزاویه AHM را با معلوم بودن وتر و یک ضلع رسم کرده و به مرکز A و شعاع AD دایره‌ای رسم می‌کنیم محل برخورد این دایره با MH نقطه D می‌باشد AD را امتداد می‌دهیم تا عمود رسم شده از نقطه M بر MH را در E قطع کند عمود منصف AE امتداد ME را در نقطه O که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است قطع می‌کند. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم با امتداد دادن MH رأس‌های B و C بدست می‌آید. (ش ۱۴۱) شرط امکان مسئله آن است که $AD<AM$ باشد.

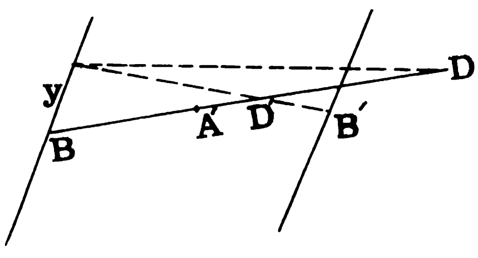


شکل ۱۴۱

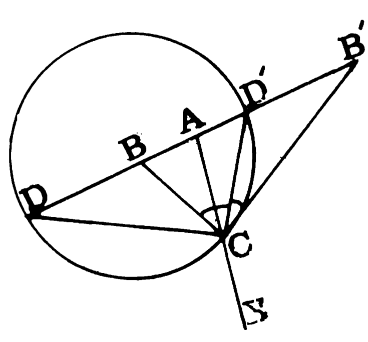
۱۴۲– اگر ABC مثلث مطلوب باشد. قرینه نقطه B نسبت به راس A نقطه B' است و $B'C=۲AM$ و لذا: $a=۲AMq=B'C\cdot q$ بنا براین برای رسم مثلث ابتداء پاره‌خط BB' را مساوی ۲c رسم کرده و از نقطه وسط آن Ax را چنان رسم می‌کنیم که زاویه $B\hat{A}\hat{x}=\hat{A}$ باشد



شکل ۱۴۲ الف



شکل ۱۴۲ ب



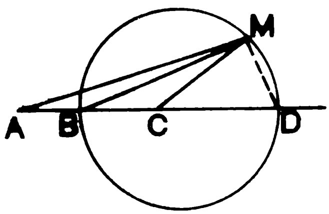
شکل ۱۴۲ ج

رأس C ازمثلث مطلوب محل تلاقی Ax با مکان‌هندسی نقطه‌هایی‌می‌باشدکه $a = q \cdot B'C$ است. این مکان هندسی دایره‌ای است به‌قطر DD' به‌قسمی‌که دونقطه D و D' خط BB' را به‌نسبت q تقسیم کرده‌اند[1]. (ش ۱۴۲)

$\frac{CB}{CB'} = \frac{DB}{DB'} = \frac{D'B}{D'B'} = q$ (شکل ۱۴۲) با تعیین D و D' بر AB، دایره به‌قطر DD' مشخص می‌شود و لذا رأس بدست می‌آید.

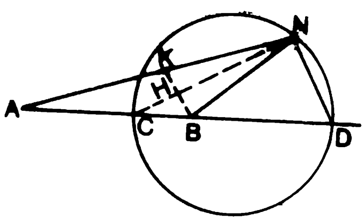
۱ــ مکان هندسی نقطه‌هایی‌که نسبت فاصله‌های آنها از دونقطه ثابت A و B برابر عدد ثابت K باشد دایره‌ای است‌که دوانتهای قطر آن پاره‌خط AB را به‌نسبت K تقسیم می‌کند.

برهان ــ اگر M یکی از نقطه‌های مطلوب باشد



شکل ۱۴۲ د

$\frac{MA}{MB} = K$ ، در مثلث AMB نیمسازهای داخلی وخارجی رأس M را رسم‌می‌کنیم‌ضلع مقابل‌را در C و D قطع می‌کند. چون‌نیمسازداخلی وخارجی هر مثلث ضلع مقابل را به‌نسبت دوضلع دیگر تقسیم می‌کند می‌توان نوشت $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$ و $\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}$ و یا $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} = K$ یعنی C و D پاره‌خط AB را به‌نسبت توافقی K تقسیم می‌کنند اما چون $\widehat{CMD}$ قائمه است، CDقطردایره‌ای است که برM می‌گذرد یعنی هر نقطه‌مانندMکه‌در رابطه $\frac{MA}{MB} = K$ صدق کند روی دایره‌ای به‌قطر CD واقع است. حال باید ثابت کرد هر نقطه مانند N از دایره مذکور در رابطه $\frac{NA}{NB} = K$ صدق می‌کند. $NC \perp ND$، دستگاه (N—ABCD) توافقی‌است،ازاین‌دوخاصیت‌نتیجه می‌شود که NC و ND نیمسازهای زاویه N از



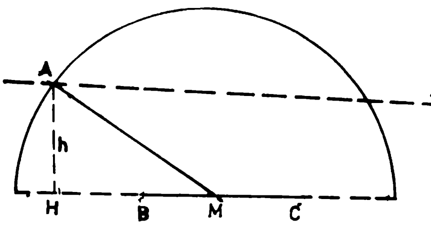
شکل ۱۴۲ ه

مثلث ANB می‌باشند، زیرا اگر از B خط BHK را موازی ND رسم‌کنیم به‌علت توافقی بودن دستگاه طولهای BH و HK با هم مساوی‌اند و از طرف دیگر BK که موازی ND است بر NH عمود می‌باشد چون در مثلث NBK خط NH بر قاعده عمود و آن را نصف کرده است. این مثلث متساوی‌الساقین می‌شود و عمود منصف قاعده نیمساز زاویه رأس نیز می‌باشد، یعنی NC نیمساز زاویه N از مثلث ANB است و بنابر خاصیت نیمساز داریم: $K = \frac{CA}{CB} = \frac{NA}{NB}$

۱۴۳ــ چون $\frac{m_a{}^2}{4}$ $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=$ لذا : $h_a=\frac{m_a}{2}$ بــدست می‌آید از طــرف دیگر

اندازه میانه AM $m_a=AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

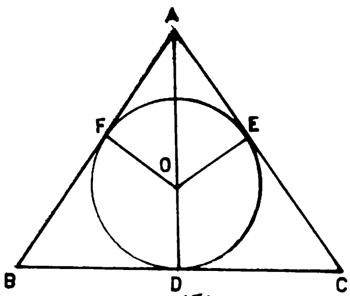
بدست‌می‌آید. رأس A برخط Δ موازی BC و به‌فاصله h از آن واقع است وهمچنین رأس A برمحیط دایره‌ای به‌مرکز M (وسط BC) و شعاع AM قرارداد نقطه تلاقی دایــره و خط Δ رأس A را نشان می‌دهد (ش ۱۴۳) شرط امکان مسئله آن است که خط Δ محیط دایره را قطع‌کند یعنی:



شکل ۱۴۳

$h<AM \Longrightarrow \frac{m_a}{2}\leqslant\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و یا $m\leqslant\sqrt{3}$ باشد.

۱۴۴ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد می‌توان نوشت:



شکل ۱۴۴

$AE=AF=p-a$

از طرفی

$(b+c)-a=l \Longrightarrow 2(p-a)=l$

بنا براین بــرای رسم مثلث به‌طریق زیر عمل می‌کنیم:

ابتداء زاویه A را رسم‌کــرده و بر دوضلع آن از نقطــه A دو قطعــه AE و AF را مساوی $\frac{l}{2}$ جدا می‌کنیم نقطه‌های E و F محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث با دوضلع AC و AB است. نیمساز AD را رسم کرده و از نقطه D خطی مماس بر دایره محاطی می‌کشیم دو رأس دیگر مثلث تعیین می‌شود. (ش ۱۴۴)

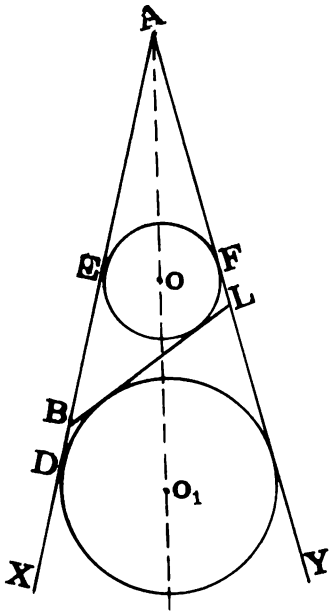
۱۴۵ــ اگر ABC مثلث‌مطلوب باشد، $AD=p$ و $AE=P-a$ می‌باشد. بنا براین می‌توان مثلث را به‌طریق زیر رسم‌کرد:

برروی خط Ax نقطه D را چنان می‌گیریم کــه $AD=\frac{a+l}{2}=p$ باشد درنقطه D دایره‌ای به‌شعاع r_a بر خط Ax مماس می‌کنیم و از نقطه A خط Ay را براین دایره

مماس می‌کشیم زاویه A معلوم می‌شود حال بر دوضلع این زاریه دوطول متساوی

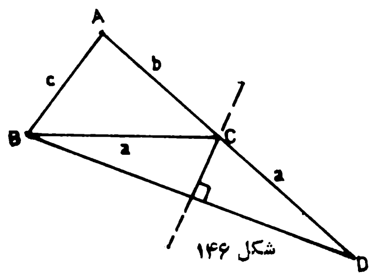
$$AE = AF = \frac{l - a}{۲} = p - a$$

را جدا می‌کنیم نقطه‌های E و F نقطه‌های تماس دایره محاطی داخلی با ضلعهای زاویه A می‌باشد این دایره را رسم کرده و مماس مشترك دو دایره را می‌کشیم تا رأس‌های B و C بدست آید. (ش ۱۴۵)



شکل ۱۴۵

۱۴۶ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، هرگاه ضلع AC را تا نقطه D به‌اندازه a امتداد دهیم مثلث ABD را با معلومات زاویه $\hat{A}$ و $AB = c$ و $AD = c \cdot K$ می‌توان رسم کرد عمودمنصف BD رأس C را مشخص می‌کند، (ش ۱۴۶)



شکل ۱۴۶

شرط امکان مسئله آن است که $a + b > c$ باشد یعنی $K > ۱$ باشد.

۱۴۷ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد چون $AH = P - a$ و $AK = P$ است[1] لذا: $HK = AK - AH = a$ می‌باشد وبنا براین می‌توان مثلث را بطریق زیر رسم کرد: ابتداء زاویه A را رسم کرده و دایره‌ای به‌شعاع r دراین زاویه محاط می‌کنیم از نقطه‌تماس،ضلع

۱ــ برای محاسبه پاره‌خطهای AH و AK می‌توان نوشت،

$$۲AH + ۲CH + ۲BE = ۲P$$

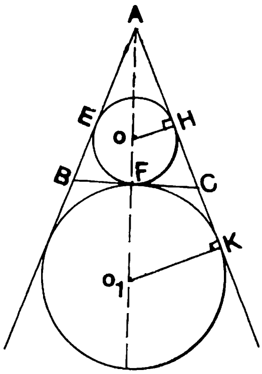
یا

$$AH + CF + BF = P$$

یا

$$AH + a = p \Longrightarrow AH = p - a$$

$$۲AK = (AC + CF + AB + BF) = AC + AB + BC = ۲P \Longrightarrow Ak = P$$



شکل ۱۴۷

زاویه را به‌اندازه a امتداد می‌دهیم انتهای آن نقطه تماس دایره‌محاطی خارجی است از این نقطه عمودی بر ضلع زاویه اخـراج کرده تا نیمساز زاویـه A را در $O_۱$ قطع کند دایـره به مرکز $O_۱$ و شعاع $O_۱K$ دایـره محاطـی خارجی نظیر به‌ضلع a می‌باشد مماس مشترك داخلی این دو دایره (دایره محاطی داخلی و دایـره محاطی خـارجی) ضلع BC از مثلث ABC است. (ش ۱۴۷)

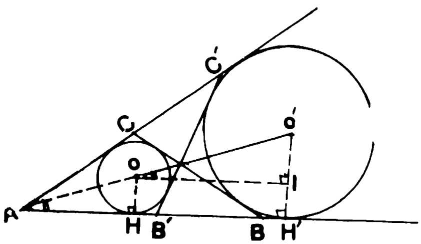
۱۴۸ــ اگر ABC مثلث‌مطلوب باشد ملاحظه می‌شود کـه با معلوم بودن OO' رسم مثلث به‌آسانی امکان‌پذیر است. درمثلث قائم‌الزاویه

OIO' می‌توان نوشت: $\widehat{O'OI}=\dfrac{\hat{A}}{۲}$ و

$O'I=r_۱-r$ و $OI=HH'=a$

$$O'I=OI\cdot tg\frac{A}{۲}=a\ tg\frac{A}{۲}$$

$$=۲R\sin A\cdot tg\frac{A}{۲}$$



شکل ۱۴۸

و یا

$$r_۱-r=۴R\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cdot tg\frac{A}{۲}$$

و یا

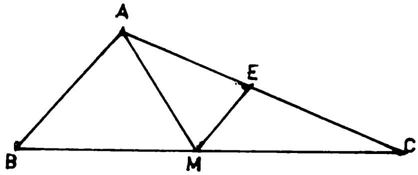
$$r_۱-r=۴R\sin^۲\frac{A}{۲}$$

و از آنجا

$$O'O=\frac{O'I}{\sin\frac{A}{۲}}=\frac{r_۱-r}{\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{r_۱-r}{R}}}=۲\sqrt{R(r_۱-r)}\ \text{و}\ \sin\frac{A}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{r_۱-r}{R}}$$

مثلث قائم‌الزاویه OIO' را با داشتن اندازه وتر و یك ضلع رسم‌کرده و به مرکزهای O

O' وشعاعهای r و r_1 دودایره می‌کشیم نقطه تلاقی مماسهای‌خارجی این دودایره رأس A و مماس‌های داخلی آنها دو رأس دیگر مثلث را مشخص می‌کند. (ش ۱۴۸)



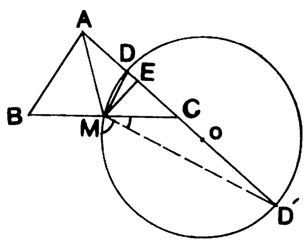
شکل ۱۴۹ الف

۱۴۹ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد و نقطه M وسط BC اختیار گردد بنا به‌فرض

$\frac{BC}{AM}=K$ یا $\frac{2MC}{AM}=K$ و یا :

$\frac{K}{2}=\frac{MC}{AM}$ از این رابطه معلوم می‌شود که M بر مکان هندسی نقطه‌هایی واقع است که

نسبت فاصله‌های‌آن نقطه‌ها از دونقطه ثابت A و C برابر مقدار معیین $\frac{K}{2}$ می‌باشد و این مکان دایره‌ای است به قطر DD' بطوریکه دونقطه D و D' مزدوجهای توافقی A و C با نسبت $\frac{K}{2}$ می‌باشند[1] حال اگر از نقطه E وسط AC خطی موازی AB رسم‌کنیم این خط بر نقطه M وسط BC می‌گذرد بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید. زاویه‌ای برابر زاویه A ساخته و برروی ضلع آن $AC=b$ را نقل می‌کنیم بر روی AC و امتداد آن دونقطه D و D' مزدوجهای توافقی C و A را با نسبت توافقی $\frac{K}{2}$ تعیین می‌کنیم به قطر DD'



شکل ۱۴۹ ب

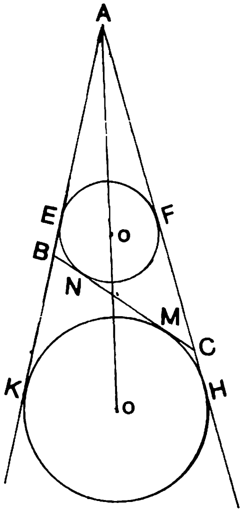
دایره‌ای رسم کرده و از نقطه E وسط AC خطی‌موازی ضلع دیگر زاویه A رسم‌می‌کنیم تا دایره را درنقطه M قطع‌کند، M را به C وصل‌کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع زاویه A را در B قطع‌کند. ABC مثلث مطلوب‌است. (ش ۱۴۹)

۱۵۰ــ ازرابطه $2a=b+c$ معلوم می‌شود که $3a=2p$ می‌باشد اگر ABC مثلث مطلوب باشد $AE=AF=p-a$ و $AK=AH=p$ در این مثلث:

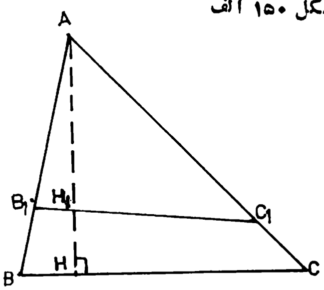
$$AK=\frac{3a}{2} \text{ و } AE=\frac{3a}{2}-a=\frac{a}{2}$$

۱ــ اثبات این مکان هندسی در مسئله شماره ۱۴۲ آمده است.

ملاحظه می‌شود کـه $AK = ۳AE$ مـی‌باشد بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید. زاویه‌ای مساوی با $\hat{A}$ رسم کـرده و بر روی یکی از ضلعهای زاویــه دوقطعه خط AE و AK از مبداء A چنان نقل می‌کنیم که AK سه برابر AE باشد در نقطه‌های E و K دو دایره بر ضلعهای زاویه مماس‌می‌کنیم (برای این منظور نیمساز زاویه A را رسم کرده و از نقطه‌های E و K عمودهایی بر AE و AK اخــراج می‌کنیم تــا نیمساز را در نقطه‌های O و O' قطع‌کنند O و O' مرکزهای‌دایره‌های‌محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر بـه ضلع BC می‌باشد) مماس مشترك داخلی این دودایره را رسم می‌کنیم تــا ضلع سوم مثلث بدست آید این مثلث با مثلث مطلوب متشابه است (زاویه A در دو مثلث متساوی وضلعــهای زاویــه‌A در دومثلث متناسب‌اند) حــال بــا داشتنــ ارتفاع h_a از مثلث مطلوب می‌توان مثلث را رسم‌کرد. ارتفاع $AH_۱ = h_a$ را از رأس A برروی AH نقل‌کرده و از نقطه $H_۱$ خطی موازی با BC رسم می‌کنیم $AB_۱C_۱$ مثلث مطلوب است. (ش ۱۵۰)

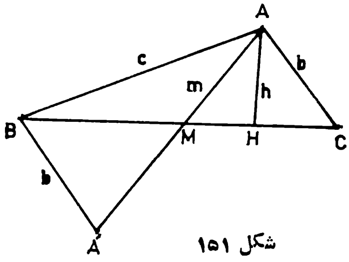


شکل ۱۵۰ الف



شکل ۱۵۰ ب

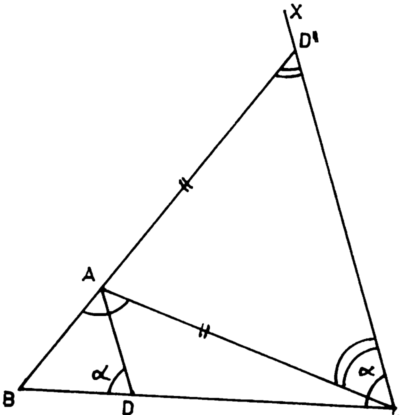
۱۵۱ـ اگــر ABC مثلث مطلوب باشد، از مثلث قائم‌الزاویه AHM وتر و یك‌ضلع آن AH در دست است. اگر AM را تــا نقطه A' ادامه‌دهیم بطوریکه $AM = MA'$ باشد، BA' برابرAC خواهدبودبنابراین‌رأس‌های B و C مکان‌هندسی نقطه‌هایی‌است‌که مجموع فاصله‌های آنها از دونقطه ثابت A و A' مساوی با مقدار معلوم l می‌باشد یعنی یك بیضی که‌کانونهای آن A و A' است بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید:



شکل ۱۵۱

ابتدا مثلث AHM را با معلوم بودن وتر و یك‌ضلع رسم‌کرده و AM را به طول MA' مساوی خود امتداد می‌دهیم و با دوکانون A و A' ومقدارثابت l (مجموع دوشعاع

حامل بیضی) یك بیضی رسم کرده محل تقاطع این بیضی با امتداد MH رأس‌های B و C می‌باشد. (ش ۱۵۱)

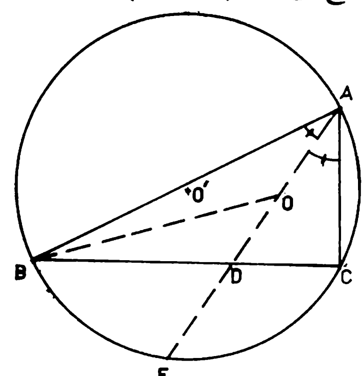


شکل ۱۵۲

۱۵۲ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، چون ازنقطه C، خط CX را موازی نیمساز AD رسم کرده و AB را امتداد می‌دهیم تا CX را درنقطه D قطع کند ازتوازی AD و CX نتیجه می‌شود که دوزاویه ACD و ADC با هم مساویند و لذا مثلث ACD متساوی‌الساقین است و بنابر این عمود منصف CD از رأس A می‌گذرد با توجه به آنچه گفته شده را حل زیر بدست می‌آید.

پاره‌خط $BC = a$ را رسم کرده وازنقطه C خط CX راچنان‌می‌کشیم که $BCX = \alpha$ باشد. به‌مرکز B و شعاع l کمانی را رسم می‌کنیم تا CX را در نقطه D قطع‌کند. عمود منصف CD، خط BD را در نقطه A رأس مثلث قطع می‌کند. (ش ۱۵۲)

شرط امکان مسئله آن است که دایره به‌مرکز B و شعاع BD خط CX را از طرف C قطع کند یعنی $BD > BC$ یا $l > a$ باشد.



شکل ۱۵۳ الف

۱۵۳ـ اگرمثلث ABC مثلث مطلوب باشد و O و O' به‌ترتیب مرکزهای‌دایره‌های محاطی و محیطی باشند، نقطه O بر نیمساز زاویه A و لذا خط AD کمان BC را درنقطه E نصف می‌کند. زاویه BOE زاویه خارجی مثلث AOB است و لذا:

$$\widehat{BOE} = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲}$$

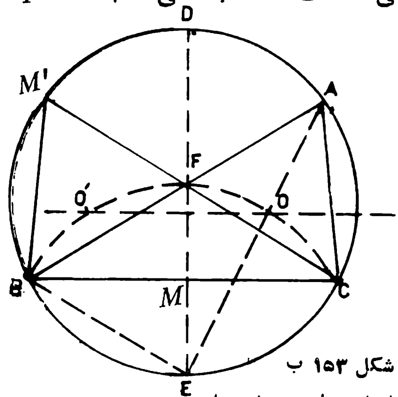
و

$$\widehat{OBE} = \widehat{OBC} + \widehat{CBE} = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{A}}{۲}$$

پس $\widehat{OBE} = \widehat{BOE}$ یعنی مثلث OBE متساوی‌الساقین است و درنتیجه نقطه O بر محیط دایره‌ای به مرکز E و شعاع EB واقع است. از آنچه گفته شد راه زیر برای رسم مثلث

بدست می‌آید. (ش ۱۵۳)

به‌شعاع R دایره محیطی را رسم‌کرده و از نقطه دلخواه M زاویه محاطی BMC را مساوی A می‌سازیم ضلع BC یکی از ضلعهای مثلث است برای تعیین رأس سوم مثلث نقطه E وسط کمان BC را مرکز قرار داده و به‌شعاع EB دایره‌ای رسم می‌کنیم کمانی از این دایره واقع بین دونقطه B و C مکان هندسی نقطه O است بقسمی‌که به‌فاصله r از وتر BC باشد یعنی برروی خطی به موازات BC و به فاصله r از آن قرار دارد لذا محل تلاقی‌کمان مزبور با این خط رأس سوم مثلث است. شرط امکان مسئله آن‌است‌که r کوچکتر از پاره‌خط MF باشد. $r \leqslant MF$ (MF قسمتی از عمود رسم شده از نقطه E بر وتر BC می‌باشد) باید توجه داشت که دو مثلث قرینه نسبت به‌قطر ED پدید مـی‌آید و چون این دو مثلث از حیث جزءها متساویند لذا مسئله دارای یك جواب است.

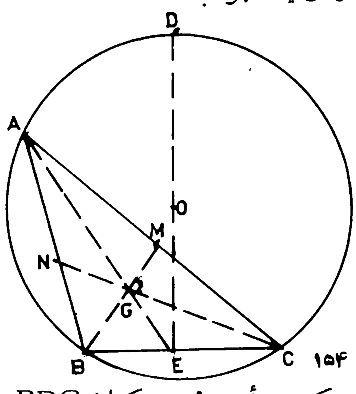


شکل ۱۵۳ ب

۱۵۴– اگر ABC مثلث مطلوب باشد و نقطه G محل تلاقی میانه‌ها فرض شود. چون زاویه BGC قائمه است لذا:

$$GE = BE = EC = \frac{a}{۲}$$

$$AE = ۳GE = ۳\frac{a}{۲}$$



شکل ۱۵۴

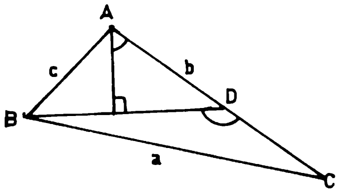
از آنجا راه رسم مثلث چنین بدست می‌آید.

بر وتر BC دایره حاوی زاویه A را رسم کرده رأس A بر کمان BDC واقع است.

و ازطرف دیگر رأس A به‌فاصله $AE = \frac{۳a}{۲}$ از وسط وتر BC قراردارد بنابراین اگر به‌مرکز E و شعاع $\frac{۳a}{۲}$ دایره‌ای رسم‌کنیم نقطه تلاقی این دایره با کمان BDC رأس A را مشخص مـی‌کند شرط امکان مسئله آن است که $AE \leqslant ED$ باشد «ED قطر دایره است» باید توجه داشت‌که دومثلث قرینه نسبت به قطر ED پدید می‌آید و چون دو مثلث از حیث جزءها متساویند لذا مسئله دارای یك جواب است. درحالتی‌که $AE = ED$ باشد

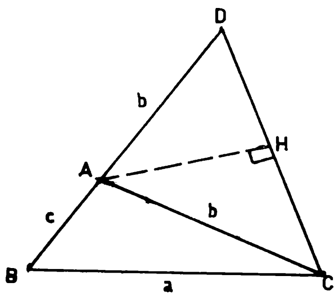
مثلث متساوی‌الساقین می‌شود. (ش ۱۵۴)

۱۵۵- اگر در مثلث ABC، AD را مساوی AC جدا کنیم مثلث BDC را با معلومات $BC=a$ و $DC=K$ و $\widehat{BDC}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$ می‌توان رسم کرد «رسم مثلث درحالت دوضلع و زاویه روبرو به یکی از ضلعها» محل تلاقی عمود منصف BD با امتداد CD رأس A را مشخص می‌کند. (ش ۱۵۵)



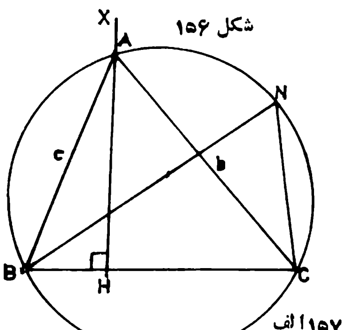
شکل ۱۵۵

۱۵۶- اگر درمثلث ABC، AB را به‌طول $AD=AC$ امتداد دهیم مثلث CBD با معلومات $BC=a$ و $BD=c+b=l$ و زاویه B رسم‌می‌شود. محل تلاقی عمود منصف CD باضلع BD رأس A را مشخص می‌کند. (ش ۱۵۶)



شکل ۱۵۶

۱۵۷- دایره‌ای به‌شعاع R رسم کرده و وتر BC را که نظیر به زاویه محاطی A است می‌کشیم اگر برخط BC عمود Hx راطوری رسم کنیم که تفاضل مربعهای فاصله جمیع نقطه‌هایش از دونقطه B و C مساوی‌مقدار K^2 باشد[1] محل تقاطع این خط با کمان $B\overset{\frown}{N}C$



شکل ۱۵۷ الف

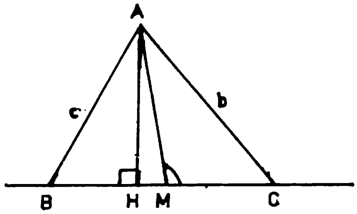
۱- مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A که تفاضل مربعهای فاصله‌های آنها به‌ترتیب از دونقطه C و B یعنی AC^2-AB^2 مساوی مقدار معلوم K^2 باشد خطی است عمود بر BC، «$BC\perp AH$ و M وسط BC است»

برهان- در مثلث AMC:

$$b^2=AM^2+\frac{a^2}{4}+2\times\frac{a}{2}\times HM \quad (1)$$

در مثلث BMC

$$c^2=AM^2+\frac{a^2}{4}-2\times\frac{a}{2}\times HM \quad (2)$$

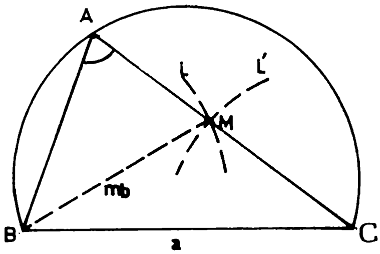


شکل ۱۵۷ ب

←

از دایره به‌شعاع R رأس سوم مثلث است. (ش ۱۵۷)

۱۵۸ــ در مثلث ABC، رأس A در دایره شامل کمان حاوی زاویه A نظیر به‌وتر BC واقع است. نقطهٔ M وسط AC بـر دایره‌ای بـه مرکز B و شعاع m_b قراردارد. ملاحظه می‌شود کـه CA دایره (O) را در A قطع کرده و با دایره L در نقطه M وسط AC برخورد کرده است. بنابراین برای رسم مثلث دایره حاوی کمان درخور زاویه A نظیر به‌وتر BC را رسم کرده و به‌مرکز B وشعاع BM دایره L را رسم می‌کنیم. بامرکز تجانس C و نسبت $K=\frac{1}{2}$ مجانس دایره (O) را رسم می‌کنیم. نقطه M که مجانس نقطه A درتجانس $\left(C \text{ و } \frac{1}{2}\right)$ است برمحیط دایره L' قراردارد



شکل ۱۵۸

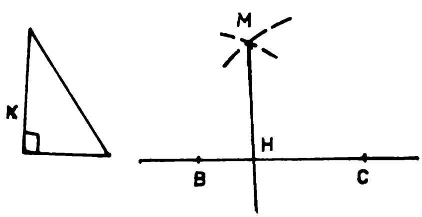
رابطه (۲) را از رابطه (۱) تفریق می‌کنیم

$$b^2-c^2=2a\times HM$$

یا

$$K^2=2a\times HM$$

و یا $HM=\frac{K^2}{2a}$. از رابطه اخیر معلوم می‌شود که موضع نقطه H روی نیم‌خط MB (به‌مبداء M) ثابت است ومکان هندسی نقطه‌هایی مانند A بر عمودی واقع است که ازنقطه H بر BC اخراج شود. در این رابطه نمی‌توان جای نقطه‌های B و C را با هم عوض کرد یعنی مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A بطوریکه $AB^2-AC^2=K^2$ باشد با مکان $AC^2-AB^2=K^2$ با هم یکی نیست. رسم مکان ــ مثلث قائم‌الزاویه دلخواهی که یکی ازضلعهای مجاور به‌زاویه قائمه آن مساوی K باشد رسم می‌کنیم، به‌مرکزهای C وB وبه‌ترتیب با شعاعهای وتر وضلع دیگر این مثلث دوکمان می‌کشیم تا یکدیگر را درنقطه‌ای مانند M قطع کنند خطی کـه از M بر BC عمود شود مکـان مطلوب است.

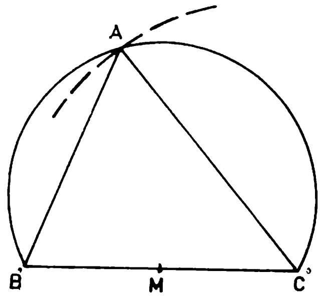


شکل ۱۵۷ ج - د

$$MC^2-MB^2=K^2$$

ومحل برخورد دودایره L و L' نقطه M وسط AC را نشان می‌دهد با امتداد دادن CM نقطه A رأس سوم مثلث بدست می‌آید. (ش ۱۵۸)

۱۵۹- درمثلث ABC، رأس A برروی کمان دایره‌ای‌است که بر B و C مرورکرده وحاوی زاویه A می‌باشد. از طرف دیگر مکان هندسی نقطه‌هایی که مجموع مربعهای فاصله‌های آنها از دو نقطه مفروض B و C مقدارمفروض K^2 باشد دایره‌ای است به‌مرکز وسط BC و و شعاع $R=\frac{\sqrt{2K^2-BC^2}}{2}$ که این مکان را می‌توان رسم کرد.[1] بنابراین: ابتداء وتر BC و کمان درخور زاویه A نظیر به این وتر را رسم‌کرده و سپس دایره‌ای به‌مرکز M وسط BC و شعاع $R=\frac{\sqrt{2K^2-BC^2}}{2}$ را رسم می‌کنیم محل تلاقی این دایره و کمان درخور زاویه A رأس A را مشخص می‌کند. (ش ۱۵۹)



شکل ۱۵۹ الف

۱- مکان هندسی نقطه‌هایی‌که مجموع مربعهای فاصله آنها از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد دایره‌ای است‌که مرکزش وسط پاره‌خط خطی است‌که دونقطه را بههم وصل می‌کنند.

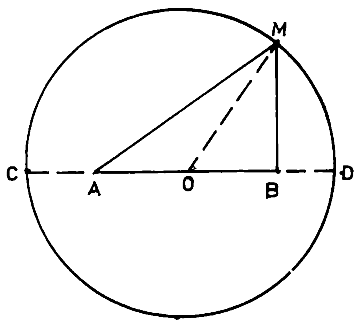
برهان- A و B دو نقطه مفروض و K^2 مقدار ثابت و O وسط AB است اگر M نقطه‌ای از مکان باشد می‌توان‌نوشت:

$$M\overset{\Delta}{A}B:\ MA^2+MB^2=2OM^2+\frac{AB^2}{2}$$

اما بنا به‌فرض $MA^2+AB^2=K^2$ است پس:

$$K^2=2OM^2+\frac{AB^2}{2}$$

و یا



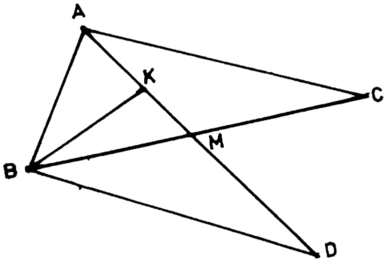
شکل ۱۵۹ ب

$$OM=\sqrt{\frac{2K^2-AB^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2K^2-AB^2}$$

از اینجا معلوم می‌شودکه طول OM مقدار ثابتی است و درنتیجه M بر دایره‌ای به مرکز O وشعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2-AB^2}$ واقع است وبرعکس اگر M نقطه‌ای از این دایره باشد چون OM میانه مثلث MAB است می‌توان نوشت:

←

۱۶۰ــ درمثلث ABC اگر میانه AM را تا نقطه D طوری امتداد دهیم که $AM=MD$ باشد با توجه به متساوی بودن دومثلث AMC و BMD نتیجه می‌شود که مساحت دو مثلث ABC و ABD برابرند (دومثلث معادل یا هم‌ارز) بنابراین در مثلث ABD ضلع $AD=۲ma$ و S معلوم است لذا می‌توان اندازه ارتفاع وارد بر AD را تعیین کرد.



شکل ۱۶۰ الف

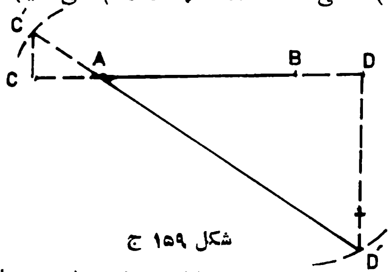
$S=\frac{۱}{۲}AD\cdot BK \Longrightarrow BK=\frac{۲S}{۲m_a}=\frac{S}{m_a}$ زاویه $\widehat{ABD}$ مکمل زاویه $\hat{A}$ است در نتیجه $\widehat{ABD}=۱۸۰^\circ-\hat{A}$ معلوم می‌شود حال با معلومات AD و BK و زاویه $\widehat{ABD}$ می‌توان

$$MA^۲+MB^۲=۲OM^۲+\frac{AB^۲}{۲}=\frac{(۲K^۲-AB^۲)}{۲}+\frac{AB^۲}{۲}=K^۲ \quad \rightarrow$$

و بنا براین هر نقطه‌ای از دایره مذکور دارای خاصیت $MA^۲+MB^۲=K^۲$ است. شرط امکان مسئله آن‌است که $.۲K^۲-AB^۲>$ یعنی $AB<K\sqrt{۲}$ باشد.

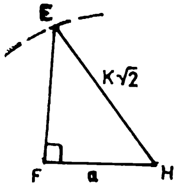
رسم مکان ـ کافی است قطر CD از دایره را که AB روی‌آن قراردارد تعیین‌کنیم. از نقطه A (دونقطه A و B و مقدار $K^۲$ در دست است) خطی مانند Ax چنان رسم می‌کنیم که $\widehat{BAx}=۴۵^\circ$ باشد به‌مرکز B وشعاع K کمانی رسم می‌کنیم تا Ax را در C' و D' قطع‌کند از این دونقطه عمودهایی بر AB فرود می‌آوریم پای این عمودها موضع نقطه C ونقطه D خواهد بود زیرا مثلا برای نقطه C می‌توان نوشت:

$CA^۲+AB^۲=CC'^۲+CB^۲=C'B^۲=K^۲$



شکل ۱۵۹ ج

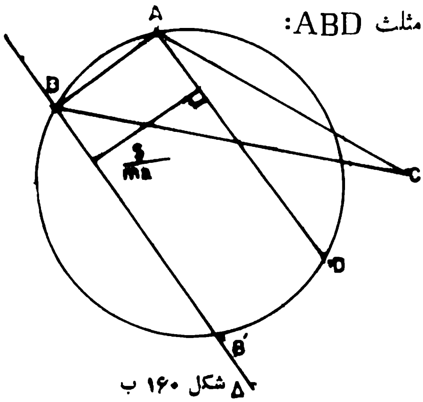
تبصره ـ می‌توان بدون توجه به‌مکان هندسی مزبور اندازه OM (طول میانه نظیر به‌ضلع a) را از رابطه $۴OM^۲=۲K^۲-AB^۲$ با ترسیم زیر بدست‌آورد: برروی یکی از ضلعهای زاویه قائمه اندازه AB را از رأس قائمه نقل کرده و به مرکز نقطه H (انتهای پاره‌خط) و شعاع $K\sqrt{۲}$ کمانی می‌زنیم نقطه تلاقی این کمان با ضلع دیگر زاویه قائمه اندازه ضلع دیگراین مثلث یعنی $۲OM$ را می‌دهد برای رسم پاره‌خط $K\sqrt{۲}$ به‌طریق زیر عمل می‌کنیم:



شکل ۱۵۹ د

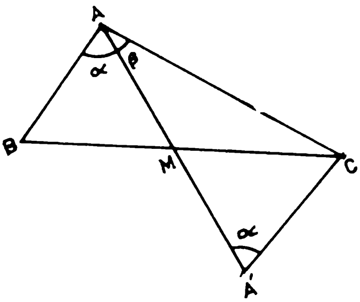
←

مثلث ABD را رسم کرده و سپس باوصل کردن نقطه B به نقطه M وسط AD و امتداددادن $BM=MC$ رأس C را بدست آورد. رسم مثلث ABD:



شکل ۱۶۰ ب

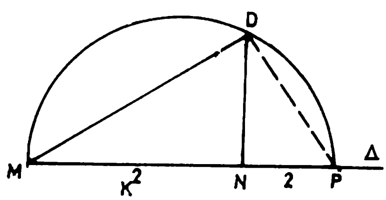
دایره‌حاوی زاویه $180^\circ - \hat{A}$ را بر وتر AD طرح کرده وچون رأس B به‌فاصله $BK=\frac{S}{m_a}$ از این وتر قراردارد خطی موازی این وتر و به‌فاصله $\frac{S}{m_a}$ از آن رسم می‌کنیم نقطه تلاقی این وتر با دایره رأس B را نشان می‌دهد از B به M وصل‌کرده وMC را به‌اندازه BM می‌گیریم مثلث ABC بدست می‌آید. خط Δ محیط دایره در دونقطه B و B' قطع می‌کند دو مثلثی که به این ترتیب بدست می‌آیند از حیث جزءها متساوی‌اند لذا مسئله دارای یك جواب است. (ش ۱۶۰)



شکل ۱۶۱

۱۶۱– در مثلث ABC اگر A' قرینه A نسبت به نقطه M (وسط BC) باشد مثلث AA'C را با معلومات دو زاویه α و β و $AA'=2m_a$ می‌توان رسم کرد پس‌از رسم این‌مثلث B که قرینهC نسبت به‌نقطه M است بدست می‌آید. مثلث ABC مطلوب است. (ش ۱۶۱)

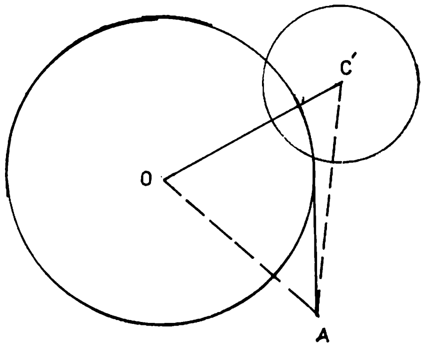
۱۶۲– اگر رأس B واقع بر (O') معلوم باشد رأس C از رأس B با یك دوران 60° حول نقطه A بدست می‌آید اما موضع رأس B در دست نمی‌باشد ولی روی دایره



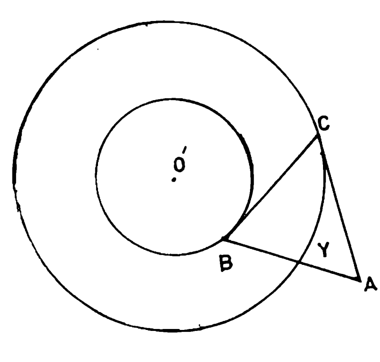
شکل ۱۵۹ه

برروی خط Δ از نقطه اختیاری M پاره‌خط $MN=K^2$ و بدنبال آن $NP=2$ را نقل می‌کنیم به‌قطر MN نیمدایره رسم کرده و از نقطه N عمودی برخط اخراج می‌کنیم تا محیط نیمدایره را در نقطه D قطع کند چون مثلث MDP قائم‌الزاویه است می‌توان نوشت:

$$ND^2=MN \,.\, NP=2K^2 \Longrightarrow ND=K\sqrt{2}$$



شکل ۱۶۲ ب



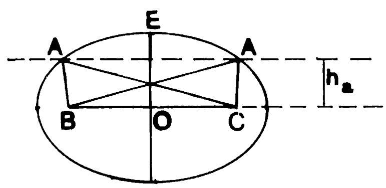
شکل ۱۶۲ الف

(O') واقع است پس دایره (O') را به‌زاویه $+60°$ یا $-60°$ دوران مـی‌دهیم تا دایره (O'_1) بدست آید نقطه‌های تقاطع دو دایره (O) و (O'_1) رأس C را می‌دهد. از A خطی رسم می‌کنیم که با پاره‌خط AC زاویه $60°$ تشکیل دهد نقطه تلاقی این‌خط با دایره (O') رأس B می‌باشد.

شرط امکان مسئله آن است که دایره (O'_1) دایره O را قطع کند و یا بر آن مماس باشد. (ش ۱۶۲)

اگر با دوران‌دایره (O)، به‌مرکز A و زاویه $\pm 60°$، دایره (O'_1) درهردوحالت دوران دایره (O) را در دونقطه قطع کند مسئله دارای چهار جواب و اگر در یك دوران مثلا ($60°$ و A) دونقطه تقاطـع و در دوران ($-60°$ و A) مماس بـاشد مسئله دارای سه جواب و اگر در هردوحالت مماس باشد مسئله دارای دو جواب و اگر در یك حالت مماس و درحالت دیگر متخارج یا متداخل نسبت به‌دایره (O) باشد مسئله فقط یك جواب دارد و بالاخره اگر در هردو دوران دایره (O'_1) دایره (O) را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

۱۶۳ـ از رابطه $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$، ارتفـاع وارد برضلع a یعنی $h_a = \frac{2S}{a}$ بدست‌می‌آید و چون ضلع a معلوم است لذا دو رأس B و C ازمثلث مشخص‌می‌شود و رأس A ازطرفی بر خطی واقع است کـه موازی BC بود، و به‌فاصله h_a از آن واقع باشد از طرف دیگر



شکل ۱۶۳

چون مجموع $b+c=l$ است یعنی رأس A بر محیط یك بیضی قراردارد که قطر بزرگتر

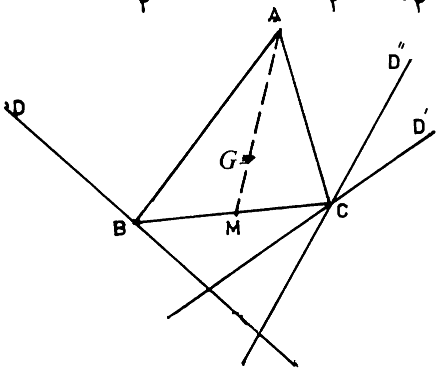
آن مساوی l و بدکانونهای B و C می‌باشد محل برخورد بیضی با خط مذکور رأس دیگر مثلث است. (ش ۱۶۳)

شرط امکان مسئله آن است که $h_a \leqslant OE$ (OE نصف قطر کوتاهتر بیضی است).

$$b^۲ = OE^۲ = BE^۲ - BO^۲ = \frac{l^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴} = \frac{l^۲ - a^۲}{۴}$$

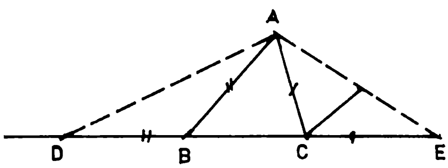
پس

$$S \leqslant \frac{a}{۴}\sqrt{l^۲ - a^۲} \text{ و یا } \frac{a}{۲}h_a \leqslant \frac{a}{۴}\sqrt{l^۲ - a^۲} \text{ و یا } h_a \leqslant \sqrt{\frac{l^۲ - a^۲}{۴}}$$



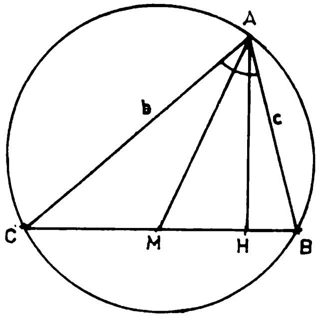
شکل ۱۶۴

۱۶۴ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، AG را از G بداندازه نصف طول خــود امتداد می‌دهیم تا نقطه M وسط BC بـدست آید. نقطه C از طرفی روی خط D′ و مکان دیگر آن روی D″ قــرینه D نسبت بــه نقطه M می‌باشد از تــلاقی D′ و D″ رأس C معلوم شود و قرینه نقطه C نسبت به M رأس B را می‌دهد (ش ۱۶۴)



شکل ۱۶۵

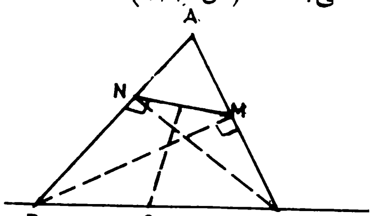
۱۶۵ــ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. ضلع BC رااز‌دو‌طرف‌امتداد داده و BD = AB و CE = AC را جــدا مــی‌کنیم بنابرایــن DE = ۲p، (۲p محیط مثلث است). زاویهٔ $\hat{B}$ از مثلث ABC دوبرابر زاویه $\hat{D}$ و زاویه $\hat{C}$ دوبرابر زاویه $\hat{E}$ می‌باشد لذا اندازه‌های دوزاویه $\hat{D}$ و $\hat{E}$ در دست است و مثلث ADE را می‌توان رسم کرد بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید. مثلث ADE را با معلوم‌های DE = ۲p و $\hat{D} = \frac{\hat{B}}{۲}$ و $\hat{E} = \frac{\hat{C}}{۲}$ رسم کرده بدین‌ترتیب رأس A مشخص‌می‌شود. عمود منصف‌های AE و AD ضلع DE را در B و C قطع می‌کنندکه دو رأس دیگر مثلث است. (ش ۱۶۵)



شکل ۱۶۶

۱۶۶ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد، $\widehat{BAC}$ کمان درخور زاویه $\hat{A}$ نظیر به وتر BC است و مکان هندسی نقطه‌هایی که در رابطه: $AC^2 - AB^2 = K^2$ صدق کنند خطی است عمود بر BC و به‌فاصله $MH = \frac{K^2}{2a}$ (M وسط پاره‌خط BC است و a طول پاره‌خط BC می‌باشد) لذا راه‌ترسیم زیر بدست می‌آید.

کمان درخور زاویه A نظیر به وتر $BC = a$ را رسم کرده و مکان هندسی $b^2 - c^2 = K^2$ را با تعیین MH به‌صورت خط عمود بر CB رسم می‌کنیم محل تلاقی این مکان با کمان درخور، نقطه A رأس سوم مثلث می‌باشد[2]. (ش ۱۶۶)



شکل ۱۶۷

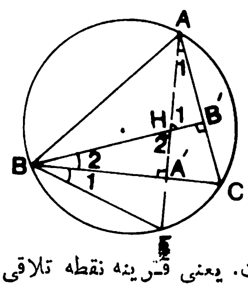
۱۶۷ـ اگر ABC مثلث مطلوب باشد دایره به‌قطر BC بر M و N می‌گذرد. چهارضلعی $BNMC$ محاطی است و مرکز دایره محیطی آن بر محل تلاقی عمود منصف MN با خط D واقع است بنا بر این راه‌حل زیر بدست می‌آید.

عمود منصف پاره‌خط MN را رسم کرده تا D را در نقطه O قطع کند به مرکز O و به شعاع OM (یا ON) دایره‌ای رسم می‌کنیم نقطه‌های تلاقی این دایره با خط D، رأس‌های B و C می‌باشند CM و BN را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کند A رأس سوم مثلث است. (ش ۱۶۷)

۱۶۸ـ اگر مسئله حل شده باشد و ABC مثلث مطلوب فرض شود. چون ارتفاع AA' را امتداد دهیم درنقطه E کمان BC را قطع‌می‌کند A' وسط پاره خط HE[3] است.

---

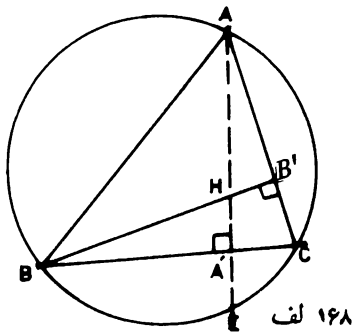
۱ و ۲ـ طریق یافتن این مکان و رسم آن درضمن حل مسئله ۱۵۷ آمده است.



شکل ۱۶۸ ب

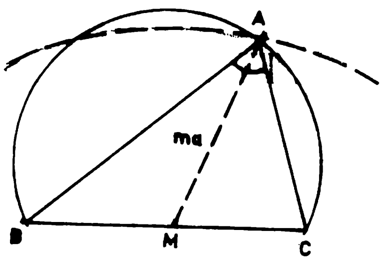
۳ـ برای اثبات آنکه $A'H = A'E$ می‌باشد، در دومثلث قائم‌الزاویه $BA'H$ و $AB'H$ چون $\angle H_2 = \angle H_1$ و لذا لازم است $\angle A_1 = \angle B_2$ باشد ازطرفی چون $\angle A_1 = \angle B_1 = \frac{\widehat{CE}}{2}$ لذا $\angle B_2 = \angle B_1$ می‌شود در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه $BA'H$ و $BA'E$ متساوی می‌شوند و لذا $A'H = A'E$ است. یعنی قرینه نقطه تلاقی ارتفاعهای هر مثلث نسبت به هرضلع بر محیط دایرهٔ محیطی آن واقع است.

بنا بر این می‌توان راه‌حل زیر را بدست آورد.
چون رأس A و مرکز دایره محیطی مثلث معلوم است لذا شعاع دایره محیطی $AO=R$ بدست می‌آید. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کرده و از نقطه مشخص A روی دایره به‌نقطه H وصل می‌کنیم. AH را امتداد داده تا محیط دایره را در E قطع کند عمود منصف HE محیط دایره را در دو نقطه B و C قطع می‌کند که همان رأس‌های B و C از مثلث ABC می‌باشند. (ش ۱۶۸)



شکل ۱۶۸ لف

۱۶۹ــ اگر ABC مثلث مطلوب باشد رأس A از یك طرف بر کمان درخور زاویه A نظیر به‌وتر معلوم BC و از طرف دیگر بر دایره‌ای به مرکز M و شعاع $AM=m_a$ واقع است بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.
پاره‌خطی به‌طول a رسم کرده و کمان درخور زاویه A نظیر به این وتر را بر آن طرح می‌کنیم به مرکز وسط پاره‌خط و شعاع m_a دایره‌ای رسم می‌کنیم نقطه تقاطع کمان درخور با دایره (m_a و M) رأس A را می‌دهد.
شرط امکان مسئله آن‌است که دایره (m_a و M) کمان درخور را قطع کند و یا بر آن مماس باشد اگر دایره (m_a و M) کمان درخور را در دو نقطه A و A' قطع کند دو مثلث ACB و $A'BC$ بدست می‌آیند که نسبت به عمود منصف BC قرینه‌اند و چون دو مثلث از حیث جزءها با یکدیگر مساویند (جای دو رأس B و C عوض شده است) لذا مسئله یك جواب دارد اگر دایره (m_a و M) بر کمان درخور مماس باشد در این صورت AM بر عمود منصف BC واقع است و یك مثلث متساوی‌الساقین بدست می‌آید که جواب مسئله‌است. اگر دایره (m_a و M) کمان درخور را قطع نکند مسئله جواب ندارد، (ش ۱۶۹)



شکل ۱۶۹

۱۷۰ــ اگر مسئله حل شده فرض شود و N نقطه مطلوب باشد باید

$$\widehat{NBC}=\widehat{NCA}=\widehat{NAB}$$

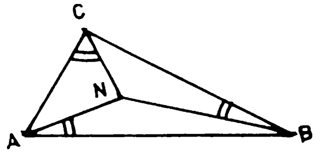
می‌توان نوشت:

$$\widehat{BNC}=۱۸۰^\circ-(\widehat{NBC}+\widehat{NCB})=۱۸۰^\circ-(\widehat{NCB}+\widehat{NCA})$$
$$=۱۸۰^\circ-\hat{C}=۱۸۰^\circ-۹۰=۹۰^\circ$$

به همین ترتیب نتیجه می می‌شود.

$$\widehat{ANB}=۱۸۰^\circ-B \text{ و } \widehat{ANC}=۱۸۰^\circ-A$$

از تساوی اخیر معلوم می‌شود که نقطه N، بر دایرهٔ به‌قطر BC قراردارد. برای تعیین جای نقطه N کافی است امتداد خط راست AN را مشخص کنیم.

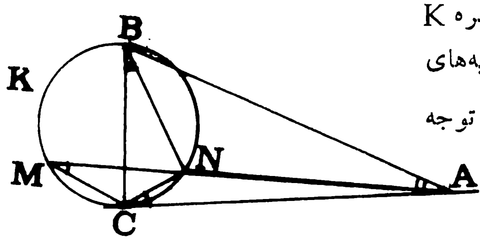


شکل ۱۷۰ الف

با توجه به‌شرط :

$$(۱)\quad \widehat{NCB}=\widehat{NAB}$$

هر خط راستی‌که از نقطه A در درون زاویه $\widehat{BAC}$ از مثلث ABC رسم شود، دایره K را در دونقطه N و M قطع می‌کندزاویه‌های $\widehat{NBC}$ و $\widehat{AMC}$ برابرند ازاین‌رو، با توجه به رابطه (۱) بدست می‌آید.

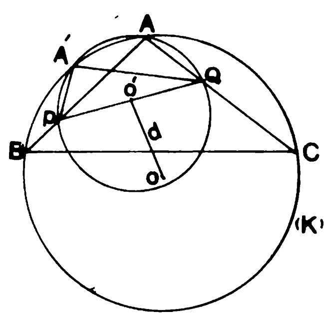


شکل ۱۷۰ ب

$$\widehat{AMC}=\widehat{NAB}=\widehat{MAB}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شودکه AB با MC موازی است بنابراین N را می‌توان به‌ترتیب زیر پیدا کرد خطی رسم می‌کنیم که از C بگذرد و با AB موازی باشد این خط راست دایره K را در نقطه دیگری غیر از C قطع می‌کند. این نقطه را M می‌گذاریم خط راست MA، دایره K را در نقطه مطلوب N قطع خواهد کرد. با این ترسیم، M در خارج مثلث ABC، و N در درون آن قرار می‌گیرد بنابراین N همان نقطه مورد نظر **است. (ش ۱۷۰)**

۱۷۱ــ اگر A رأس قائمه مثلث باشد



شکل ۱۷۱

$\widehat{PAQ}=۹۰^\circ$ است بنابراین دایره به قطر PQ مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آنها قطر PQ به زاویه قائمه دیده می‌شود نقطه برخورد این‌دایره‌بادایرهKرأس‌های‌زاویه‌های قائمه را تشکیل می‌دهندکه در دایره K محاط باشند و ضلعهای آنها از نقطه‌های P_1 و Q می‌گذرند وبالاخره مثلثABCمشخص‌می‌شود اگر بخواهیم دوضلع مجاور به‌زاویه قائمه از

مثلث مطلوب (و نه امتداد آنها) از نقطه‌های P و Q بگذرند باید P و Q در داخل دایره K واقع باشند ولی این شرط برای وجود جواب کافی نیست، مسئله وقتی جواب دارد که دودایره (K) و (C) یکدیگر را قطع کنند. اگر R شعاع دایره (K) و d فاصله بین‌دومرکز دایره (K) و دایرد (C) باشد. (ش ۱۷۱)

اگر $R+\frac{RO}{۲}>d>R-\frac{PO}{۲}$ دوجواب دارد

اگر $d=R-\frac{PO}{۲}$ یك جواب دارد

اگر $d<R-\frac{PO}{۲}$ جواب ندارد

۱۷۲ــ اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشد.کافی است نیمسازهای خارجی زاویه‌های A' و B' و C' را رسم کرد.[۱] تا ازتلاقی دو به‌دوآنها سه رأس مثلث مطلوب یعنی A و B و C بدست آید. در هر رأس مثلث دونیمساز داخلی و خارجی برهم عمودند. هردونیمساز

۱ــ مسئله هندسه المپیاد و ریاضی مجارستان.

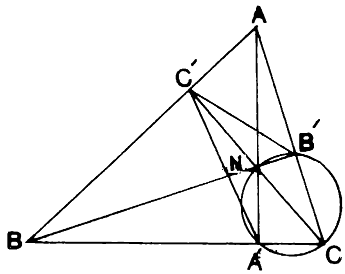
تعریف ــ مثلثی‌که‌ازوصل‌کردن نقطه‌های پای ارتفاعهای‌مثلث ABC بدست‌می‌آید (مثلث $A'B'C'$) مثلث ارتفاعیه نامیده می‌شود و نقطه H که مرکز تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC و بنابرآنچه در زیر ثابت خواهد شد نقطه H محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث ارتفاعیه (مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ارتفاعیه) می‌باشد،

برهان ــ زاویه‌های $\widehat{HB'C}$ و $\widehat{HA'C}$ هردو قائمه‌اند لذا دایره به‌قطر HC از A' و B' می‌گذرد و $\widehat{HA'B'}=\widehat{HCB'}$ است . از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه $CC'A$ زاویه $\widehat{C'CA}=۹۰-\hat{A}$ اما $\widehat{BHC'}=\widehat{B'HC}=\hat{A}$ و $\widehat{HBC}=۹۰°-\hat{A}$ و $\widehat{HA'B'}=\widehat{HCB'}=۹۰°-A$ و به همین‌ترتیب با درنظرگرفتن‌آنکه دایره به قطر BH بردو نقطه A' و C' می‌گذرد و... $\widehat{HA'C'}=\widehat{HBC'}=۹۰°-\hat{A}$ و لذا نتیجه می‌شود $\widehat{AA'C'}=۹۰°-\hat{A}$ بنابراین $\widehat{C'A'H}=\widehat{HA'B'}$ یعنی AA' نیمساز زاویه A' از مثلث ارتفاعیه $A'B'C'$ است وبا استدلالی مشابه‌می‌توان همین مطلب را برای دو زاویه دیگر مثلث ارتفاعیه ثابت‌کرد.

اگر مثلث ABC یك زاویه منفرجه داشته باشد ارتفاع وارد از رأس‌زاویه منفرجه (مثل حالت مثلث با زاویه‌های حاده) نیمساز داخلی‌زاویه مثلث ارتفاعیه است. ولی دو ارتفاع دیگر نیمسازهای زاویه‌های خارجی را در مثلث ارتفاعیه تشکیل می‌دهند بنابراین اگر مثلث مطلوب

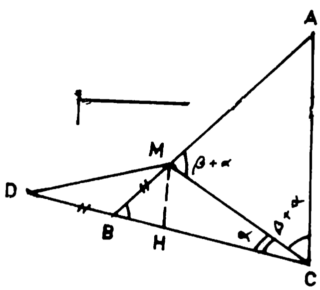
←

خارجی یك رأس با دونیمساز داخلی رأس دیگر دریك نقطه به‌هم می‌رسند. مثلث ABC که از برخورد نیمسازهای خارجی مثلث $A'B'C'$ بدست می‌آید همان مثلث مطلوب است زیرا مثلا AA' نیمساز داخلی A' از مثلث $A'B'C'$ است و درضمن بر BC عمود است یعنی AA' و BB' و CC' ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند رأس‌های مثلث ABC عبارتند ازمرکزهای سه دایره محاطی خارجی در مثلث $A'B'C'$ (مثلا A محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه A و دونیمساز خارجی زاویه‌های B' و C' است). (ش ۱۷۱).



شکل ۱۷۲

۱۷۳- اگر ABC مثلث مطلوب باشد چون از ضلع AB طول AM را مساوی AC جدا کنیم قطعه BM مساوی با $c-b$ می‌شود و همچنین اگر ضلع a را به طول $BD=BM$ امتداد دهیم مثلث BMD متساوی‌الساقین و ازآنجا زاویه $\widehat{DMB}=\frac{\hat{B}}{۲}$ می‌شود و چون



شکل ۱۷۳

مثلث AMC نیزمتساوی‌الساقین است و زاویه $\widehat{AMC}$ زاویه خارجی‌مثلث MBC است لذا اگر زاویه MCB را مساوی α بگیریم:

$$\widehat{AMC}=\widehat{ACM}=B+\alpha \text{ و چون } B+\alpha+\alpha=۲B \text{ پس } \alpha=\frac{B}{۲}$$

زاویه منفرجه داشته‌باشد علاوه برمثلث ABC، مثلثها BCH و CAH و ABH هم جوابهایی برای مسئله‌اند ارتفاع‌های مربوط به‌این مثلثها به‌ترتیب در نقطه‌های A و B و C به‌هم می‌رسند به‌عبارت‌دیگرمرکزهای‌ارتفاعی‌مثلث‌های BCH و CAH و ABH و ABC به‌ترتیب عبارتنداز نقطه‌های A و B و C و H.

برای هر چهارجواب مسئله این ویژگی وجود داردکه: رأس‌ها و مرکزهای ارتفاعی هریك از مثلثهای جواب مرکزهای دایره‌هائی هستندکه بر ضلعهای مثلث $A'B'C'$ (یا امتداد آنها) مماس‌اند.

و لذا مثلث MDC نیز متساوی‌الساقین است و بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.

ضلع $BC=a$ را بطول $BD=c-b$، ($a+b-c=d \Longrightarrow c-b=a-d$) امتداد داده و به مرکز B و شعاع $c-b$ کمانی رسم می‌کنیم تا عمود منصف DC را در نقطه M قطع کند، از M به B وصل کرده و امتداد می‌دهیم که ضلع زاویه $BCX=۲\hat{B}$ را در نقطه A قطع کند، ABC مثلث مطلوب است. (ش ۱۷۳)

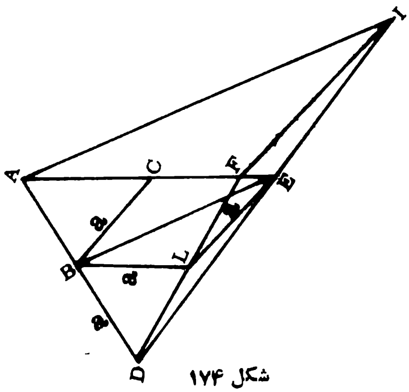
شرط امکان مسئله آن است که $BH<BM$ باشد

$$BH=DH-DB=\frac{DC}{۲}-DB=\frac{a+c-b}{۲}-(c-b)=\frac{a-c+b}{۲}$$

$$BM=BD=c-b$$

$$\frac{a-c+b}{۲}<c-b \Longrightarrow a<۳(c-b)$$

۱۷۴ــ اگر مثلث ABC مثلث مطلوب باشد، اندازه ضلع $BC=a$ فرض‌شود ضلعهای AB و AC را از طرف B و C به‌اندازه $BD=a$ و $CE=a$ امتداد داده تا مثلث ADE تشکیل شود، اگر از نقطه B پاره BL را موازی و مساوی با CE رسم کنیم و DL را امتداددهیم تا CE را در F قطع کند مثلثهای BDL و ADF متساوی‌الساقین می‌شوند. واگر ازنقطه F خطی موازی LE رسم کنیم تا امتداد DE را در نقطه I قطع کند مثلث BLE متساوی‌الساقین می‌شود و چون $FI \| LE$ است لذا در مثلث DFI می‌توان نوشت:



شکل ۱۷۴

$$(۱)\quad \frac{DL}{DF}=\frac{LE}{FI}$$ و در مثلث ADF داریم $$(۲)\quad \frac{DL}{DF}=\frac{BL}{AF}$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{LE}{FI}=\frac{BL}{AF}$ اما $BL=LE=a$ و لذا $AF=FI$ می‌شود. بنابراین راه‌حل زیر برای مسئله بدست می‌آید.

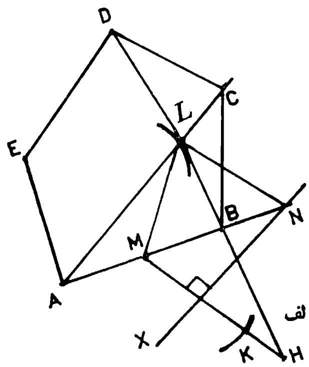
ابتداء زاویه A را رسم کرده و برروی دوضلع آن (به‌فرض $b>c$)، $AD=q$ و $AE=p$ را جدامی‌کنیم مثلث ADE بدست می‌آید برروی ضلع AE، از رأس A پاره‌خط

$AF = AD = q$ را جدا کرده و به مرکز F و شعاع AF کمانی می‌زنیم تا امتداد DE را در نقطه I قطع کند، F را به D وصل کـرد و از نقطه E خطی موازی FI رسم می‌کنیم تا DF را در L قطع کند از L خطی مـوازی CE رسم مـی‌کنیم تا AD را در نقطه B (رأس مثلث) واز B خطی موازی FI می‌کشیم تا AE را درنقطه C قطع‌کند ABC مثلث مطلوب است. (ش ۱۷۴)

تنها شرط امکان مسئله آن است‌که دایره به مرکز F و شعاع AFامتدادDE را از طرف نقطه E قطع‌کند یعنی $FI > EF$ یا $q > p - q$ و از آنجا $p > ۲q$ باشد.

فصل پنجم

حل مسئله‌های ترسیم چندضلعی‌ها



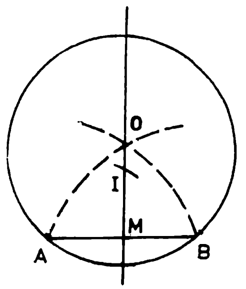
شکل ۱۷۵ الف

۱۷۵ــ ابتدا $AB=a$ رسم کرده و از نقطه B عمود BH را به‌طول a بر آن اخراج می‌کنیم. H را به نقطه M وسط AB وصل کرده MK را مساوی a جدا کرده و عمود منصف MK را می‌کشیم تا امتداد AB را در نقطه N قطع کند. به‌مرکزهای A و N و شعاع a دوکمان می‌زنیم تا در نقطه L متلاقی شوند، چون بر امتداد BL طول LD را مساوی a جدا کنیم D یکی از رأس‌های پنج‌ضلعی است و محل تلاقی کمانی بـه مرکز B و شعاع a با AL رأس C را مشخص می‌کند، رأس پنجم پنج‌ضلعی قرینه رأس C نسبت به‌محور DM است[1]. (ش ۱۷۵)

---

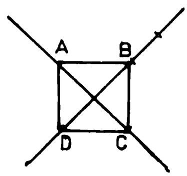
۱ ــ این طریق ترسیم پنج‌ضلعی منسوب به ابوالوفای بوزجانی است.
محمد ابوالوفای بوزجانی (قرن‌چهارم‌هجری) متولددربوزجان «شهرکوچکی‌بین‌هرات‌ونیشابور» از بزرگترین ریاضیدانان و منجمان‌قدیم‌ایران‌است. او مخترع‌ظل (تانژانت) وقطرظل(سکانت) و قطر ظل تمام (کسکانت) و جدول‌های مثلثاتی وکاشف حل‌بعضی ازمطالب مثلثات‌کروی است،

طریق دیگر رسم پنج‌ضلعی منتظم به‌ضلع مفروض a: عمود منصف AB $(AB=a)$ را رسم کرده و به مرکزهای A و B، و شعاع a دو کمان می‌کشیم تا در O تلاقی کنند به‌مرکز A و شعاع OM، (M وسط AB) کمانی رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در I قطع کند، I مرکز دایره محیطی پنج ضلعی است با رسم این دایره و داشتن ضلع $AB=a$ پنج ضلعی رسم می‌شود. (ش ۱۷۵ ب)



شکل ۱۷۵ ب

۱۷۶ـ عمود منصف قطر مربع را رسم می‌کنیم و آنرا در دو طرف قطر به‌اندازهٔ نصف قطر امتداد می‌دهیم تا دو رأس دیگر معلوم شود. (ش ۱۷۶)

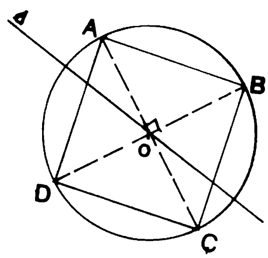


شکل ۷۶

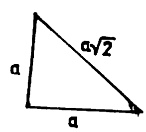
۱۷۷ـ اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و $ABCD$ مربع مطلوب باشد مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و

$$OA=OB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

می‌باشد پس حل مسئله به طریق زیر است: مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین به‌ضلع a را رسم می‌کنیم وتر این مثلث $a\sqrt{2}$ می‌باشد.

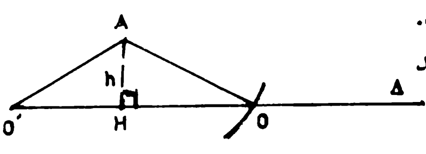


شکل الف ۱۷۷



شکل ۱۷۷ ب

به مرکز A و شعاع $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ کمانی رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطه O قطع کند به‌مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم و خط OA را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در نقطه C قطع کند قطر BOD را بر قطر AOC عمود رسم می‌کنیم $ABCD$ مربع مطلوب است (ش ۱۷۷) شرط امکان مسئله آن است که دایره به مرکز A و شعاع OA خط (Δ) را قطع کند یا بر آن مماس باشد.



شکل ۱۷۷ ج

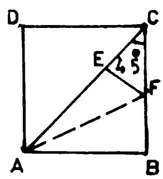
اگر فاصله نقطه A از خط Δ برابر h باشد شرط امکان مسئله به‌صورت:

$h\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2}$ درمی‌آید باید توجه داشت که در

حالت $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ > h دایره به‌مرکز A وشعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ خط Δ در دو نقطه O و 'O (قرینه نسبت به‌نقطه H) قطع می‌کند. دومربع حاصل از لحاظ اندازه ضلع برابر وفقط مرکزهای دو مربع در دو نقطه متمایز بر روی خط Δ واقع است و عموماً یك جواب برای مسئله منظور می‌شود.

در حالت $h=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ مسئله یك جواب دارد و در حالت $h>\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ مسئله‌جواب ندارد.

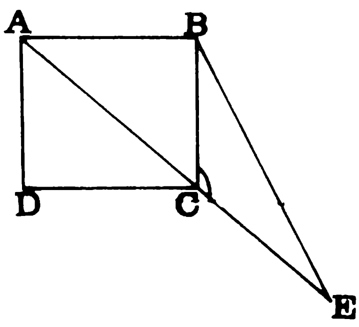
۱۷۸ــ فرض می‌کنیم مسئله حل شده باشد به‌مرکز A و به‌شعاع AB کمانی‌رسم می‌کنیم تاقطر AC را در E قطع‌کند CE = L برابر است با تفاضل قطر و ضلع مربع از E مماس EF را بر دایره رسم می‌کنیم مثلث‌قائم‌الزاویه CEF متساوی‌الساقین است . و FE = FB



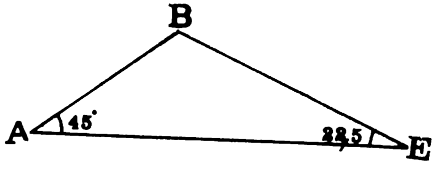
شکل ۱۷۸

است پس راه‌حل مسئله چنین است‌که مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین CEF را رسم می‌کنیم و FC را به اندازهٔ FE تا نقطه B امتداد می‌دهیم CB یك ضلع مربع است. (ش ۱۷۸)

۱۷۹ــ اگر مسئله حل شده باشد و ABCD مربع مطلوب باشد. اگر قطر AC را تا نقطه E امتداد دهیم بطوریکه CE = BC باشد مثلث BCE متساوی‌الساقین و زاویه $\widehat{BCE}=۱۳۵^\circ$ است (زاویه‌خارجی‌مثلث قائم‌الزاویه ABC) بنابراین $\widehat{CBE}=\hat{E}=۲۲/۵^\circ$ در مثلث ABE ضلع AE (مجموع یك ضلع و قطر) و زاویه $\hat{E}$ و زاویه $\hat{A}_۱$ معلوم است بنابراین راه‌ترسیم‌زیر بدست‌می‌آید. پاره‌خطی به‌اندازه مجموع طول قطر و ضلع‌مربع جداکرده واز یک سر پاره‌خط زاویه $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$ و از سر دیگر پاره‌خط زاویه $\hat{E}=۲۲/۵^\circ$ (زاویه‌ای برابر با ۴۵° رسم کرده و نیمساز آن را



شکل ۱۷۹ الف

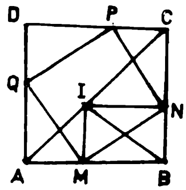


شکل ۱۷۹ ب

می‌کشیم) را بر این‌پاره‌خط طرح‌می‌کنیم، B نقطه تلاقی ضلعهای دیگر دو زاویه، یك رأس دیگر از مربع می‌باشد. (ش ۱۷۹)

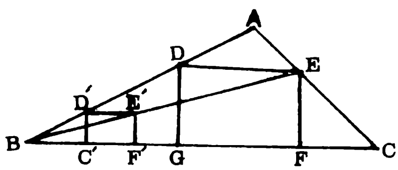
با بدست آوردن طول AB که ضلع مربع است ترسیم مربع میسر می‌باشد. مسئله همواره امکان داشته و شرط خاصی برای آن وجود ندارد.

۱۸۰ــ درمربع ABCD به‌ضلع a می‌خواهیم مربعی محاط کنیم که مساحتش b^2 باشد ضلع این مربع b است. به‌مرکز یکی از رأس‌های مربع مفروض مانند B کمانی بـه شعاع b رسم می‌کنیم تا قطر AC را در I قطع کند. از I عمودهای IM و IN را برضلعهای AB و BC فرود می‌آوریم. شکل IMBN مستطیل است. پس $MN=b$ و MN یك ضلع ازمربع مطلوب است. PC و DQ را روی CD و DA به‌اندازه BN جدا می‌کنیم. PQMN جواب مسئله است. (ش ۱۸۰)



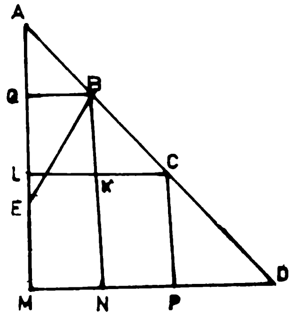
شکل ۱۸۰

۱۸۱ــ اگر DEFG مربع مطلوب باشد. از نقطه دلخواه G′ واقع بـر BC عمود C′D′ را بر BC اخراج می‌کنیم (D′ محل تلاقی این عمود با ضلع AB است) وبا ضلع G′D′ مربع G′D′E′F′ را رسم می‌کنیم. مربع مطلوب در تجانس به‌مرکز B مجانس این مربع می‌باشد. نقطه E روی خط BE′ و ازطرف دیگر روی ضلع AC واقع است لذا نقطه تلاقی آنها می‌باشد بنابراین راه ترسیم زیر بـدست می‌آید. از نقطه دلخواه G′ واقع بر BC خطی بر آن عمود می‌کنیم تا AB را درنقطه D′ قطع کند با ضلع G′D′ مربعی رسم کرده و BE′ را وصل‌می‌کنیم تا AC را در نقطه E قطع کند از E عمود EF را بـر BC فرود می‌آورد و از نقطه E خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را درنقطه D قطع کند و بالاخره از D عمود DG را بر BC فرود می‌آوریم چهارضلعی GDEF مربع مطلوب است[1]. (ش ۱۸۱)



شکل ۱۸۱

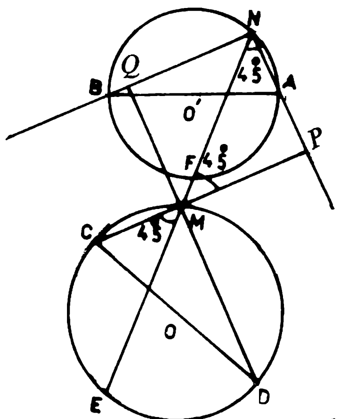
۱ــ هرگاه نظیر هرنقطه مانند M ازشکل F نقطه‌ای مانند M′ در شکل F′ وجود داشته باشد بطوریکه از نقطه معیین A رابطه $K=\dfrac{\overrightarrow{AM'}}{\overrightarrow{AM}}$ ، (K عدد جبری ثابت مخالف یـا یك) برقرار باشد شکل F′ مجانس شکل F است.



شکل ۱۸۲

۱۸۲ـ از نقطه B عمودی بـر AD اخراج کرده و روی آن $BE=CD$ جـدا می کنیم A را به E وصل کـرده و از نقطـه B خطی موازی AE رسم کـرده و از دونقطه C و D دوعمود بر دوخط متوازی مذکور فرود آورده وپای این‌عمودها را روی این دوخط نقطه‌های N و M و K و L مـی‌گیریم چهار ضلعـی LKNM مـربع مطلـوب است کـه امتداد ضلعهایش‌از نقطه‌هایA و B وC وD می‌گذرد

اثبات ـ دومثلث قائم‌الزاویه BQE و DCP در حالت وتر و یك زاویه حـاده برابرند: $BE=CD$ و $\widehat{BEQ}=\widehat{CDP}$ (ضلعهای دوزاویه بـرهم عمودند) از تساوی آنها نتیجه می‌شود که: $CP=QB$ وچون $CP=KN=LM$ است و $QB=LK=MN$ می‌باشد پس: $LK=KN=MN=LM$ می‌شود یعنی در چهارضلعی LKNM که ضلعها مساوی و زاویه‌های قائمه‌اند، مربع می‌باشد. (ش ۱۸۲)



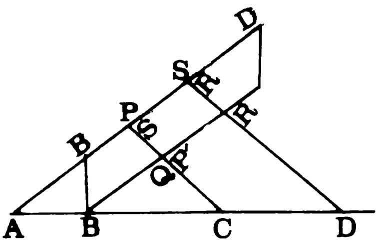
شکل ۱۸۳

۱۷۳ـ دایره(O)را به‌قطر CD ودایرهٔ (O') را به‌قطر AB رسم می‌کنیم. نقطه‌های E و F وسط کمان‌های $\widehat{CD}$ و $\widehat{AB}$ را بـه‌هم وصل می‌کنیم‌خط EF دودایره را در M و N قطع می‌کند خطهای MC و MD و NA و NB را در P و Q قطع مـی‌کنند . شکـل MPNQ مربع مطلوب‌است.زیرا زاویه‌های $\hat{M}$ و $\hat{N}$ هر یك °۹۰ درجـه مـی‌باشند و

$$\widehat{NMP}=\widehat{CME}=\frac{\widehat{CE}}{۲}=۴۵^\circ \text{ و } \widehat{MNP}=\frac{\widehat{AF}}{۲}=۴۵^\circ$$

پس $\widehat{MPN}=۹۰^\circ$ است، چون $NP=PM$ است پس شکل MPNQ مربعی است که هر ضلعش از یکی از نقطه‌های A و B و C و D مـی‌گذرد، (ش ۱۸۳) اگر E و F را وسطهای کمان‌های دیگر دایره‌ها انتخاب‌کنیم مسئله جواب دیگری خواهد داشت. همچنین ممکن است دایـره‌ها را به‌قطر AC و BD و یـا به‌قطر AD و BC رسم نمود، بنابراین عموماً مسئله ۶ جواب دارد،

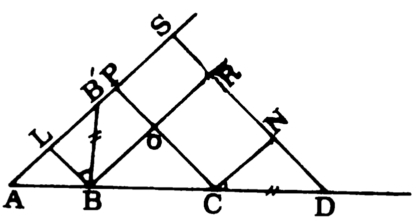
۱۸۴ـ[1] مسئله را حل شده و PQRS را، مربع جواب می‌گیریم اگرمربع PQRS را به‌اندازهٔ °۹۰ دور مرکز خودش دوران‌دهیم. (درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، CD بـه وضع $C'D'$ درمی‌آیـد به‌طوریکه $C'D' \perp CD$ و $C'D' = CD$ نقطه‌ای‌مانند B' وجود داردبه‌طوریکه BB' برخط راست e (که از C و D می‌گذرد) عمود و طولی برابر CD داشته باشد، B' بـر ضلع AD' واقع است بنا براین، رسم مربع بصورت زیر می‌باشد. از نقطه B عمودی بر خط راست e



شکل ۱۸۴ الف

اخراج کرده و روی آن $BB' = CD$ را جدا می‌کنیم ضلعهای‌مربع PQRS بر این‌چهارخط راست واقع‌اند: ۱) خط راست AB'، ۲) خط راستی‌که از B موازی AB' رسم شود، ۳) و ۴) خطهای راستی‌که از C و D عمود بر AB' رسم‌شوند. چون BB' را درهریك از دوطرف خط راست e می‌توان رسم کرد. مسئله دوجواب داردکه نسبت به خط راست e، قرینه یکدیگرند.(درشکل ۱۸۴ ب تنها یکی از جواب‌ها رسم شده است).

بررسی درستی جـواب. از نقطه B پاره‌خط BL را عمود بر AB' و ازنقطه C، پاره‌خط CN را عمود بـر DS رسم مـی‌کنیم در دو مثلث قـائم‌الزاویه BLB' و CND داریـم :

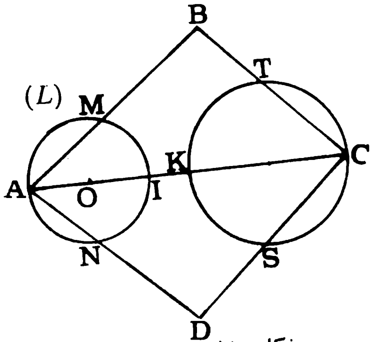


شکل ۱۸۴ ب

$BB' = CD$ و $\widehat{LBB'} = \widehat{NCD}$ (بـرابری دو زاویـه به‌علت عمود بـودن ضلعهای آنها دو به‌دو بـرهم مـی‌باشد) بنابراین دو مثلث برابرند و داریـم $BL = CN$ یعنی دو ضلع مجاور در مستطیلی‌که رسم‌کرده‌ایم برابرند لذا چهارضلعی بدست‌آمده مربع است.

۱۸۵ـ رأس A بـر دایره L به‌قطر MN واقع است و چـون قطر AC از مربع نیمساز زاویه $\hat{A}$ است پس کمان $\widehat{MN}$ را در نقطه I وسط آن قطع می‌کند. ازطرف‌دیگر

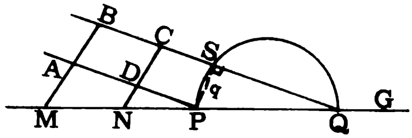
۱ـ مسئله هندسه المپیاد ریاضی مجارستان.



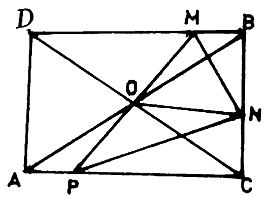
شکل ۱۸۵

رأس C بر دایره به‌قطر ST قراردارد وقطر AC این دایره را درنقطه K وسط کمان $\widehat{ST}$ قطع می‌کند بـا رسم قطر IK قطر AC و از آنجا رأس‌های A و C مشخص شده و مربع مطلوب رسم می‌شود. (ش ۱۸۵)

۱۸۶ــ مثلث قـائم‌الزاویه PSQ را با معلوم بودن $PS = p$ می‌توان‌رسم کرد. ازM و N دوخط راست موازی PS رسم‌می‌کنیم واز P و Q عمودهایی برPS فرودمی‌آوریم، ازچهار خط راست حاصل، مستطیلی بدست می‌آیدکه با شرطهای مسئله سازگار است. مسئله وقتی و تنها وقتی جواب داردکه مثلث PSQ قابل رسم باشدیعنی باید $p < PQ$. با این‌شرط‌مثلث PSQ رامی‌توان درهرطرف‌خط‌راست e رسم کرد. بنابراین دو جواب برای‌مسئله‌بدست‌می‌آیدکه نسبت به خط‌راست e قرینه یکدیگرند. (ش ۱۸۶)



شکل ۱۸۶



شکل ۱۸۷

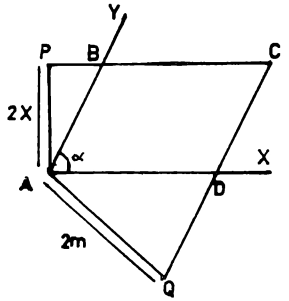
۱۸۷ــ فرض‌کنیم مسئله حل شده باشد و مثلث قائم‌الزاویه MNP نصف مستطیلی باشد کـه در مستطیل ACBD محاط شده است . قطـر MP از O می‌گذرد زیـرا می‌دانیم متوازی‌الاضلاعی که در متوازی‌الاضلاع دیگر محاط شود. محل‌تلاقی قطرهایشان برهم منطبق‌است .

چــون مثلث ONP متساوی‌الساقین است زاویهٔ $\widehat{MON}$ دوبرابر زاویهٔ $\widehat{MPN}$ است. و $\operatorname{tg}\widehat{MPN} = \frac{MN}{PN} = \frac{P}{q}$ پس راه‌حل مسئله چنین است : ابتداء زاویه‌ای خــارج مستطیل می‌سازیم‌که تانژانت‌آن $\frac{p}{q}$ باشد. وضلع DB ازمستطیل مفروض را حول نقطهٔ O به‌اندازهٔ

۱ــ مسئله هندسه‌المپیاد مجارستان

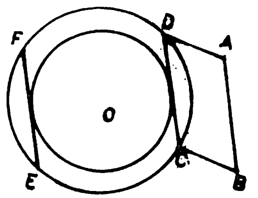
۲ــ اثبات این مطلب در ضمن حل مسئله ۱۹۹ همین فصل آمده است.

دوبرابر این زاویه دوران می‌دهیم تا BC را در N تلاقی کند، به‌مرکز O و به‌شعاع ON دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلعهای دیگر مستطیل مفروض‌را قطع کند نقطه‌های تلاقی،رأس‌های مستطیل مطلوب است. (ش ۱۸۷)



شکل ۱۸۸

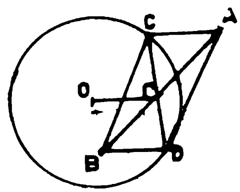
۱۸۸- زاویهٔ XAy را مساوی α رسم کرده عمود $Ap = ۲p$ را بر AX و $AQ = ۲m$ را بر Ay اخراج می‌کنیم، اگر از P موازی AX واز Q موازی Ay رسم کنیم،رأس‌های B و D از متوازی‌الاضلاع بدست خواهد آمد. (ش ۱۸۸)



شکل ۱۸۹ الف

۱۸۹- اولا: اگر A و B دو رأس مجاور باشند در دایرهٔ (O) وتر EF را برابر AB جدا می‌کنیم به‌مرکز O دایرهٔ دیگری مماس بر EF رسم می‌کنیم و براین دایره مماس CD را بموازات AB می‌کشیم متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسئله است.

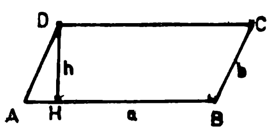
ثانیاً: اگر A و B دورأس مقابل باشند. AB را وصل‌می‌کنیم و از O مرکز دایره به M وسط AB وصل‌می‌کنیم اگر از M عمودی بر OM اخراج کنیم تا دایره را در C و D قطع کند ACBD متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (ش ۱۸۹)



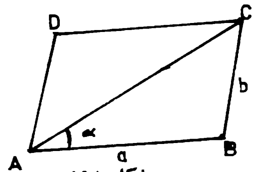
شکل ۱۸۹ ب

بحث : درحالت اول مسئله وقتی جواب دارد که طول قطعه خط AB کوچکتر ازقطر دایره باشد و در حالت دوم بایستی M در داخل دایره قرارگیرد تا مسئله جواب داشته باشد.

۱۹۰- ابتداء ضلع AB را به‌اندازه a رسم می‌کنیم، سپس خطی بموازات AB و به‌فاصلهٔ h از آن رسم می‌کنیم و به مرکز دو نقطه A و B دوکمان به‌شعاع b رسم می‌کنیم تا خط مزبوررا درD وCقطع‌کند.ABCD متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (ش ۱۹۰)

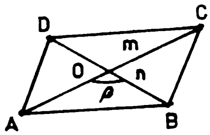


شکل ۱۹۰



شکل ۱۹۱

۱۹۱ــ مثلث ABC را با معلوم بودن دوضلع و زاویه α می‌توان رسم‌کرد. با رسم این مثلث رسم متوازی‌الاضلاع میسر است. (ش ۱۹۱)

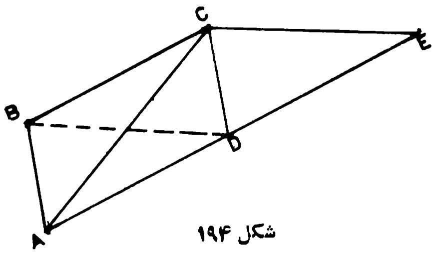


شکل ۱۹۲

۱۹۲ــ $AO=\frac{m}{۲}$ و $BO=\frac{n}{۲}$ است، بنا بر این مثلث AOB را بامعلوم بودن دوضلع و زاویه بین آنها می‌توان رسم کرد پس از رسم این مثلث، متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود. (ش ۱۹۲)

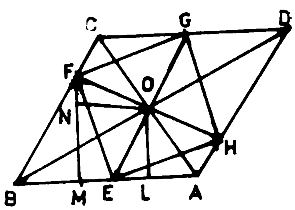
شکل ۱۹۳

۱۹۳ــ مثلث ABC را با معلوم بودن‌سه‌ضلع می‌توان رسم‌کرد و لذا متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود. (ش ۱۹۳)



شکل ۱۹۴

۱۹۴ــ اگر ABCD متوازی‌الاضلاع‌مطلوب باشد قطرBD را درامتدادBC انتقال می‌دهیم تا B بـر C منطبق شود (بـردار انتقال $\overrightarrow{BC}$ است) D به‌وضع E درامتداد AD درمی‌آید چهارضلعی BDEC متوازی‌الاضلاع استو زاویه ACE همان زاویه بین دوقطر است و $AE=۲AD$ است. مثلث ACE را با معلوم‌های AE ومیانه CD و زاویه ACE رسم می‌کنیم[1] پس از رسم مثلث، CB را موازی‌ومساوی و هم‌جهت با DA رسم می‌کنیم رأس B بدست می‌آید (ش ۱۹۴)

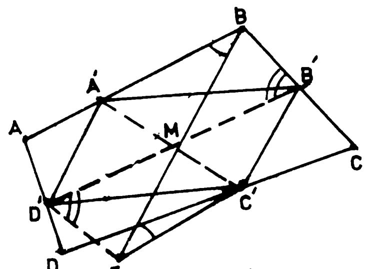


شکل ۱۹۵

۱۹۵ــ فرض‌کنیم مسئله حل شده باشد ومربع EFGH در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط باشد مرکز مربع همان مرکز متوازی‌الاضلاع خــواهد بـود از O عمود OL را بــر AB فرود می‌آوریم وهمچنین از F عمود FM را بر AD و از O عمود ON را بر FM رسم می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OFN و OLE

۱ــ این مسئله در ضمن مسئله‌های مربوط به‌رسم مثلث در شماره ۱۶۹ حل شده است.

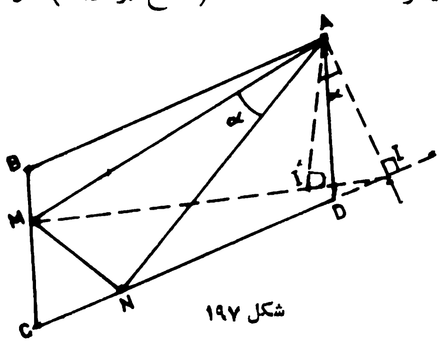
درحالت وتر و یك زاویه با هم برابرند پس $ON = OL$ و $LE = FN$. بنابراین راه‌حل مسئله چنین‌است: از O عمود OL را بر AB فرود می‌آوریم و روی AB قطعه خط LM را برابر OL جدا می‌کنیم. از M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا BC را در F قطع کند، از O عمودی بر FM فرودمی‌آوریم پای عمود نقطه N است. LE را به‌اندازهٔ FN جدا می‌کنیم FO و EO را امتداد می‌دهیم تا AD را در H و CD را در G قطع کنند. (ش ۱۹۵)



شکل ۱۹۶

۱۹۶ـ اگر مسئله حل شده فرض شود و $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع و نقطه M مرکز آن فرض‌شود اگر نقطه B را به M وصل‌کرده و به‌اندازه خود امتداد دهیم تا F بدست آید و F را بـه نقطه‌های C' و D' وصل‌کنیم از تساوی دو مثلث $BA'M$ و FMC' نتیجه می‌شودکه $\widehat{A'BM} = \hat{F}_1$ یعنی AB با FC' مـوازی است همچنین از تساوی دو مثلث MBB' و $MD'F$ نتیجه می‌شودکه $\widehat{BB'M} = \widehat{MD'F}$ یعنی BC با $D'F$ موازی‌است. بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. قرینه B را نسبت به‌نقطه M تعیین‌کرده (نقطه F) از این نقطه دوخط موازی بـا AB و BC رسم می‌کنیم تـا CD و AD را به‌ترتیب در نقطه‌های C' و D' قطع‌کند. C' و D' را به‌نقطه M وصل‌کرده و امتداد می‌دهیم تا AB و CB را درنقطه‌های A' و B' قطع‌کند چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (ش ۱۹۶)

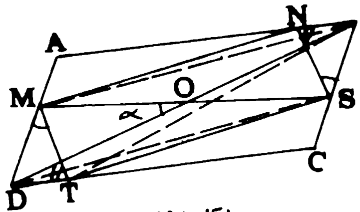
۱۹۷ـ برای تعیین مثلث کافی است‌که رأس M از آن‌را بدست‌آوریم. یك مکان M ضلع BC از متوازی‌الاضلاع است و مکان دیگر آن از دوران N (واقع بر CD) حول A و به‌اندازه زاویه α بدست مـی‌آید. ضلع CD را حول A و به‌زاویه α دوران‌می‌دهیم، مبدل آن ضلع BC را در M قطع مـی‌کند. با تعیین M به‌مرکز A و شعاع AM کمانی از دایره را رسم می‌کنیم تا CD را در نقطه N قطع کند AMN مثلث مطلوب است. (ش ۱۹۷)



شکل ۱۹۷

شرط امکان مسئله آن است‌که مبدل CD (دوران یافته CD در دوران به‌مرکز A و

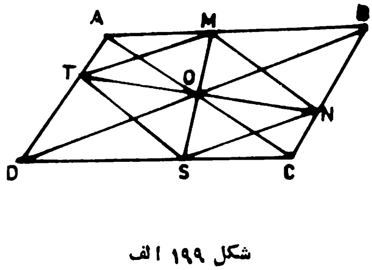
زاویه α) ضلع BC را در نقطه‌ای بین B و C قطع کند. دایره به مرکز A و شعاع AM ضلع CD را درنقطه های N و N' قطع می‌کند. اما فقط یکی از این دونقطه قابل‌قبول و جواب مسئله است زیرا زاویه $NA'M$ با α مساوی نمی‌باشد.


شکل ۱۹۸

۱۹۸ـ اگر مسئله حل شده فرض شود . از تساوی زاویه‌های $\hat{M}_1$ و $\hat{S}_1$ وهمچنین $\hat{T}_1$ و $\hat{N}_1$ وپاره‌خطهای MT و NS تساوی دومثلث DMT و BSN نتیجه می‌شود و از آنجا تساوی $BS = MD$ بدست می‌آید چهارضلعی $MDSB$ متوازی‌الاضلاع است و NT از O گذشته (O مرکز متوازی‌الاضلاع) و درآن نصف می‌شود و لذا مرکز متوازی‌الاضلاع بر مرکز مستطیل منطبق است. و O مرکز مستطیل معلوم است و مسئله منجر به این می‌شود که مثلث متساوی‌الساقین OMT به زاویه رأس α را چنان رسم‌کنیم‌که رأس O ازآن بر مرکز متوازی‌الاضلاع و رأس‌های M و T از آن بر ضلعهای AD و DC واقع باشند بنابراین می‌توان چنین عمل‌کرد. رأس M از مثلث متساوی‌الساقین MOT بر ضلع AD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ واقع بوده، و مکان دیگر آن از دوران T (واقع بر DC) حول نقطه O (مرکز متوازی‌الاضلاع) و به زاویه α بدست می‌آید بنابراین DC را در حول‌نقطه O و به‌زاویه α دوران می‌دهم. نقطه تلاقی مبدل CD با AD نقطه M می‌باشد. با تعیین M، دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM رسم می‌کنیم از تلاقی دایره با ضلعهای DC و BC و AB، سه رأس دیگر مستطیل بدست می‌آید. (ش ۱۹۸)

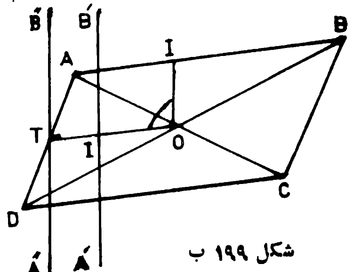
شرط امکان مسئله آن‌است که مبدل CD (دوران یافته CD حول مرکز O و به‌زاویه α) ضلع AD را در نقطه‌ای بین A و D قطع کند. دایره به مرکز O و شعاع OM هر ضلع را در دونقطه قطع می‌کندکه یکی از آنها قابل قبول نمی‌باشد.

۱۹۹ـ اگر $MNST$ لوزی مطلوب باشد، مرکز لوزی بر مرکز متوازی‌الاضلاع



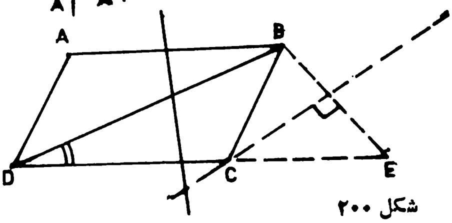
شکل ۱۹۹ الف

منطبق می‌باشد[1]. به‌این‌ترتیب ملاحظه می‌شود که چون مرکز لوزی مشخص و مکان رأس‌های آن بر روی ضلعهای متوازی‌الاضلاع است بنابراین با تعیین یك رأس لوزی، آن‌را می‌توان رسم کرد و مکان رأس T بر روی AD و مکان دیگر آن به این ترتیب بدست می‌آید که اگر ضلع AB ۹۰° دوران کند و درتجانس به‌مرکز O و نسبت $\frac{m}{n}$ مجانس وضع جدید $A'B'$ ($A'B'$ مبدل AB است که ۹۰° در حول نقطه O دوران کرده‌است) در تلاقی با AD نقطه T را می‌دهدبنابراین: ابتداء AB را به‌اندازه ۹۰° در حول نقطه O دوران داده و سپس‌مجانس $A'B'$ رادر تجانس به‌مرکز O و نسبت $\frac{m}{n}$ بدست می‌آوریم نقطه تلاقی این مجانس با AD نقطه T می‌باشد از T به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا BC را در نقطه N قطع کند نقطه‌های تلاقی عمودی که از O بر MN رسم شود بادوضلع مقابل متوازی‌الاضلاع، رأس‌های M و S از لوزی است. (ش ۱۹۹)



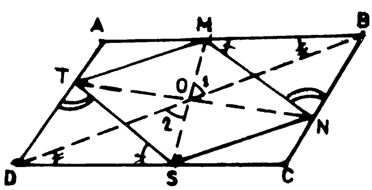
شکل ۱۹۹ ب

۲۰۰– اگر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد. چون DC را امتداد داده و در روی آن $CE=CB$ را جدا کنیم مثلث BDE بدست می‌آید که BD قطر متوازی‌الاضلاع و DE برابر با نصف محیط و زاویه BDE زاویه بین قطر و ضلع متوازی‌الاضلاع است. عمود



شکل ۲۰۰

۱– در دومثلث BMN و DST، زاویه‌های $\hat{N}$ و $\hat{T}$ با هم و زاویه‌های $\hat{M}$ و $\hat{S}$ نیز باهم برابرند و $MN=ST$ می‌باشد. بنابراین دومثلث با هم مساویند و لذا $MB=SD$ و $BN=DT$ می‌باشد حال اگر قطر BD را وصل کرده و از نقطه O به M و S وصل کنیم دو مثلث OMB و OSD با هم مساویند زیرا:

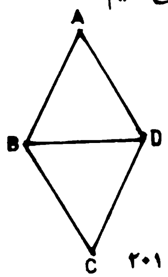


شکل ۱۹۹ ج

$MB=SD$ و $BO=OD$ و $\widehat{ODS}=\widehat{MBO}$

است بنابراین زاویه O مساوی با زاویه O_2 و MOS یك خط راست و $OS=MO$ یعنی O وسط قطر MS از لوزی است که همان مرکز لوزی می‌باشد.

منصف BE از نقطه C می‌گذرد بنا براین: مثلث BDE را با معلوم‌های اندازه یك قطر و اندازه نصف محیط متوازی‌الاضلاع و زاویه بین قطر و ضلع رسم کـرده و عمود منصف ضلع BE را می‌کشیم تا در نقطه C، ضلع DE را قطع کند از B به C وصل می‌کنیم و از C به‌وسط BD وصل کرده و آنرا به‌اندازه خودش امتدادمی‌دهیم تا نقطه A بدست آید. ABCD متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (ش ۲۰۰)



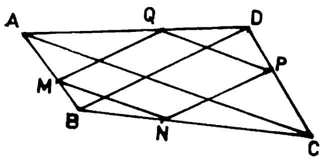
شکل ۲۰۱

۲۰۱ـ از لوزی ABCD طول ضلع وقطر BD معیین است. بنا براین‌مثلث‌متساوی‌الساقین ABD را با معلوم بودن قاعدهٔ BD و ساق AB می‌توان رسم کرد. قرینه رأس A نسبت به BD رأس چهارم لوزی است. (ش ۲۰۱)

۲۰۲ـ مسئله را حل شده فرض‌کرده اگر MNPQ لوزی مطلوب باشد درمثلث‌های DQP و DAC داریم:

$$\frac{QP}{AC}=\frac{DQ}{DA} \quad \text{یا} \quad QP=\frac{DQ\times AC}{DA}$$

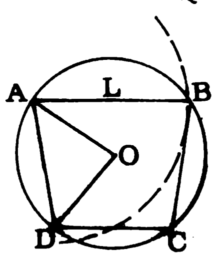
به‌همین ترتیب ازمثلث‌های MAQ و BAD حاصل‌می‌شود $\frac{AQ}{DA}=\frac{QM}{BD}$ و یا : $QM=\frac{AQ\times DB}{DA}$ و چون $QM=QP$ است پس:



شکل ۲۰۲

$$\frac{DQ\times AC}{DA}=\frac{AQ\times BD}{DA} \quad \text{یعنی} \quad \frac{QA}{QD}=\frac{AC}{BD}$$

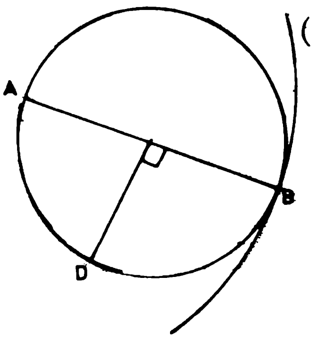
چون نسبت قطرها معلوم است از این تناسب جای نقطهٔ Q روی AD مشخص مـی‌شود و پس از تعیین Q لوزی رسم می‌شود. (ش ۲۰۲)



شکل ۲۰۳

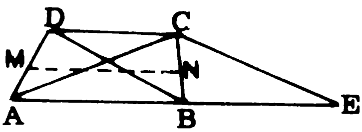
۲۰۳ـ اگـر ABCD ذوزنقه مطلوب باشد، چـون $\widehat{AD}=\frac{\widehat{ABCD}}{۳}$ است پس : $\widehat{AD}=۹۰$ می‌باشد، بنا براین از نقطه دلخواه A واقع برمحیط‌دایره‌مفروض دایره‌ای، به‌مرکز

A و شعاع l رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه B قطع کند نقطه A را حول مرکز O و به‌اندازه $90°$ دوران می‌دهیم تا نقطه D بدست آید از D خط DC را موازی AB رسم می‌کنیم $ABCD$ ذوزنقه مطلوب است. (ش ۲۰۳)



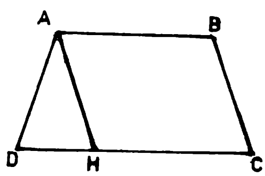
شکل ۲۰۳ ب

شرط امکان مسئله آن است که دایره به مرکز A و شعاع l دایره محیطی را قطع کند. با توجه به آنکه مرکز دایره (l و A) بر محیط دایره محیطی ذوزنقه واقع است برای تقاطع دو دایره لازم است $l < 2R$ باشد باید توجه کرد که اگر $2R = l$ باشد قاعده DC تبدیل به یك نقطه می‌شود و مسئله مورد ندارد.



شکل ۲۰۴

۲۰۴ اگر $ABCD$ ذوزنقه مطلوب باشد. اگر قاعده AB را به‌اندازه قاعده DC تا نقطه E امتداد دهیم $AE = 2l$ می‌باشد و $CE = DB$ است بنابراین مثلث ACE را با داشتن سه ضلع می‌توان رسم کرد. با معلوم بودن زاویه A از ذوزنقه، چون زاویه A_1 معلوم است زاویه $C\hat{A}D$ مشخص می‌شود. از نقطه A خطی چنان رسم می‌کنیم که با AC زاویه $C\hat{A}D$ را بسازد ضلع این زاویه خطی را که از نقطه C موازی AE رسم شود در نقطه D رأس ذوزنقه قطع می‌کند از D خطی موازی با CE رسم می‌کنیم تا AE را در نقطه B قطع کند، B رأس دیگر ذوزنقه است. (ش ۲۰۴)

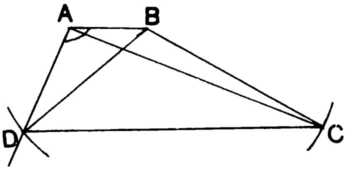


شکل ۲۰۵

۲۰۵ــ از A خطی بموازات BC رسم می‌کنیم در مثلث متساوی‌الساقین ADH قاعده DH که تفاضل دو قاعدهٔ ذوزنقه است مقداری است معلوم و زاویهٔ $D\widehat{A}H$ که برابر تفاضل دو زاویهٔ غیرمتساوی ذوزنقه است (زیرا: $A\hat{H}C = A\hat{D}H + D\hat{A}H$ و $A\hat{H}C = A\hat{B}C$) نیز معلوم است. پس مثلث را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث DH را تا نقطهٔ C به‌اندازهٔ قاعدهٔ بزرگتر امتداد می‌دهیم و AB را بموازات DH برابر قاعدهٔ کوچکتر می‌کشیم، ذوزنقه رسم می‌شود. (ش ۲۰۵)

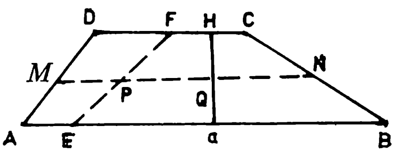
۲۰۶ــ یکی از دو قاعده مثلا AB معلوم و زاویهٔ $\hat{A}$ هم معلوم است. AB را رسم می‌کنیم

و زاویهٔ A را می‌سازیم به‌مرکز B و به‌شعاع قطر BD دایره‌ای رسم مـی‌کنیم تا AX را در D قطـع کند از D بـه موازات B رسم می‌کنیم و به مـرکز A و به شعاع قطر AC دایره‌ای رسم می‌کنیم، رأس C بدست می‌آید. (ش ۲۰۶)



شکل ۲۰۶

۲۰۷- فرض می‌کنیم $ABCD$ ذوزنقهٔ مفروض و EF و GH دوخط متقاطع با دو قاعده باشندکه‌یکدیگر را در داخل ذوزنقه قطع نکنند. حال اگر خط MN وسطهای دوساق DA و BC را به‌هم‌وصل کندو EF را در P و GH را در Q قطع‌کندمی‌دانیم که مساحت ذوزنقه مساوی است با حاصل‌ضرب طول ارتفاع در طول قطعه خطی که وسطهای دوساق را به‌هم وصل می‌کند بنابراین چون مساحتهای سه ذوزنقهٔ $DFEA$ و $FHGE$ و $HCBG$ یکی است وارتفاع آنها بایکدیگر برابراست باید داشته باشیم: $MP=PQ=QN$



شکل ۲۰۷

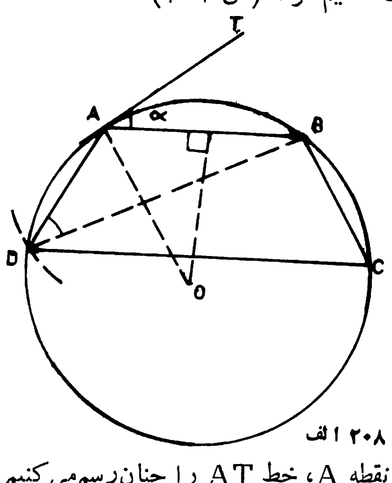
از اینجا معلوم می‌شود که برای حل مسئله‌کافی است MN را به سه قسمت متساوی تقسیم کرده از نقطه‌های تقسیم P و Q دوخط اختیاری رسم‌کنیم کـه دوقاعده را قطع‌کنند و یکدیگر را در داخل ذوزنقه قطع نکنند به‌این ترتیب ذوزنقه به‌سه‌قسمت متعادل تقسیم‌می‌شود. به‌همین‌روش هرگاه MN را به n قسمت متساوی تقسیم‌کنیم می‌توان ذوزنقه را نیز به n قسمت متعادل تقسیم‌کرد. (ش ۲۰۷)

۲۰۸- اگر $ABCD$ ذوزنقه مطلوب باشد.

چون از نقطه A مماس AT را بر دایره رسم کنیم:

$$\widehat{TAB}=\widehat{ADB}=\alpha$$

است، $\widehat{ADB}$ کمان درخـور زاویه α نظیر به‌وتر AB می‌باشد. عمور منصف وتـر AB و عمودی‌که از نقطه A بر AT اخراج شود در مرکز دایره متقاطع‌اند بنابراین‌راه ترسیم ذوزنقه چنین بدست می‌آید.



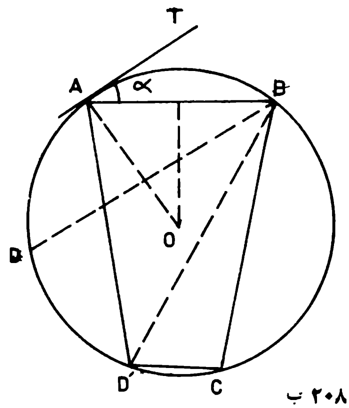
شکل ۲۰۸ الف

پاره‌خطی به‌اندازه ضلع AB رسم‌کرده و ازنقطه A، خط AT را چنان‌رسم‌می‌کنیم که با AB زاویه α را تشکیل دهد عمود منصف AB و خط عمود بـر AT از نقطه A را

رسم می‌کنیم نقطه تلاقی این دو، مرکز دایره محیطی ذوزنقه می‌باشد دایره محیطی را به‌مرکز O وشعاع OA رسم می‌کنیم وبه‌مرکز B وشعاع BD کمانی رسم کرده تا محیط دایره را در نقطه D قطع کند از D خطی موازی AB می‌کشیم تا محیط دایره را در C قطع کند. ABCD ذوزنقه مطلوب است. (ش ۲۰۸)

شرط امکان ترسیم آن است که دایره به‌مرکز B و شعاع BD دایره محیطی ذوزنقه را قطع کند و لذا باید

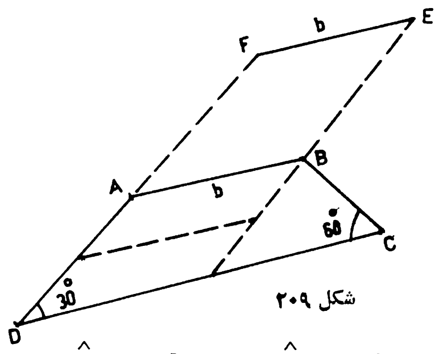
$$|R-BD|<\text{خط‌المرکزین}=OB=R<R+BD$$



شکل ۲۰۸ ب

اما نامساوی $OB=R<R+BD$ همواره محقق است ونامساوی $|R-BD|<R$ اگر $R-BD>0$ باشد یعنی $R>BD$ باشد $R-BD<R$ همواره درست است و اگر $R-BD<0$ باشد $R<BD$ نامساوی به صورت $BD-R<R$ درمی‌آید که دراین‌صورت $BD<2R$ می‌شود یعنی شرط وجود نقطه D آن است که BD طول قطر ذوزنقه از قطر دایره کوچکتر باشد

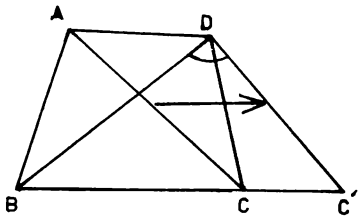
تعداد جواب‌ها- اگر دایره به‌مرکز B و شعاع BD دایره محیطی ذوزنقه را دردو نقطه D و 'D قطع می‌کندذوزنقه 'ABCD جواب دیگری برای مسئله می‌باشد.



شکل ۲۰۹

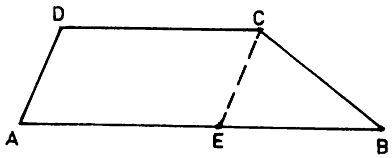
۲۰۹- اگر ABCD ذوزنقه مطلوب باشد. ملاحظه می‌شود که اگر ساق AD را امتداد داده و از رأس B خطی موازی‌آن رسم کنیم هر پاره‌خط موازی با CD و متکی بر دوخط AF و BE برابر b می‌باشد و چهارضلعی ABEF متوازی‌الاضلاع‌است بنا براین راه‌حل زیر بدست می‌آید:

پاره‌خط DC رامساوی a جداکرده و زاویه $\hat{D}=30°$ و زاویه $\hat{C}=60°$ بر دوسر این پاره‌خط طرح می‌کنیم برروی امتداد ضلع دیگر زاویه D از یك نقطه دلخواه خطی موازی CD رسم کرده برروی آن پاره‌خطی به‌اندازه b جدا می‌کنیم از انتهای این‌پاره‌خط خطی‌موازی DA رسم‌می‌کنیم نقطه تلاقی این خط با ضلع دیگر زاویه C رأس‌سوم‌ذوزنقه است. رأس چهارم هم با رسم BA موازی CD بدست می‌آید. (ش ۲۰۹)



شکل ۲۱۰

۲۱۰ـ قطر AC را به‌اندازهٔ قاعدهٔ AD منتقل می‌کنیم. مثلث BDC' با معلوم بودن دوضلع BD و DC' و زاویهٔ بین آنها قابل رسم است. پس از رسم این مثلث به مرکز D و شعاع ضلع معلوم DC کمانی رسم می‌کنیم که BC' را در C قطع کند و ذوزنقه ABCD را رسم می‌کنیم. شرط امکان مسئله این است که کمان مذکور، BC' را بین B و C' قطع کند. (ش ۲۱۰)

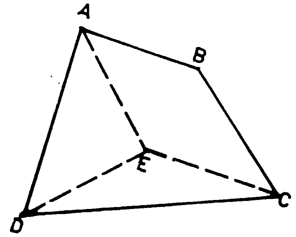


شکل ۲۱۱

۲۱۱ـ اگر ABCD ذوزنقه مطلوب باشد ضلع AD را در امتداد AB انتقال می‌دهیم تا D بر C واقع شود (بردار انتقال $\overrightarrow{DC}$ می‌باشد) در این صورت A وضعی مانند E بر AB خواهد داشت. چهارضلعی AECD متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$CE=DA \text{ و } EB=AB-DC$$

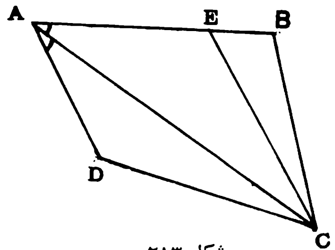
اندازه‌های سه‌ضلع از مثلث ECB معلوم است. این مثلث را می‌توان رسم کرد. با رسم این مثلث و امتداد دادن ضلع BE از طرف E و جدا کردن EA مساوی CD بر این امتداد و رسم پاره‌خطی موازی و مساوی و هم‌جهت با EC از نقطه A رأس D بدست می‌آید اگر $AB=a$ و $CD=b$ و $BC=c$ و $AD=d$ فرض شود. (ش ۲۱۱) شرط امکان مسئله آن است که : $c<a-b+d$ و $a-b<c+d$ و $d<a-b+c$ باشد.



شکل ۲۱۲

۲۱۲ـ اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد ضلع BC را انتقال می‌دهیم تا B بر A واقع شود و E وضع جدید نقطه C باشد مثلث ADE را با داشتن دوضلع و زاویه بین آنها (زاویه بین دوضلع AD و BC از چهارضلعی) می‌توان رسم کرد. از مثلث DEC سه ضلع در دست است. بنا بر این ابتداء مثلث ADE را با داشتن دوضلع و زاویه بین آنها رسم کرده وسپس مثلث DEC با داشتن سه‌ضلع و با

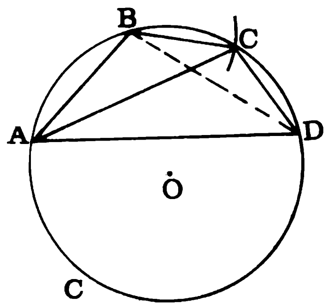
توجه به اینکه ضلع DE مشترک بین این مثلث ومثلث ADE است رسم می‌کنیم به این ترتیب سه رأس A و D و C از چهارضلعی مشخص شده است حال از C خطی موازی و مساوی با AE رسم می کنیم تا نقطه B بدست آید. (ش ۲۱۲)



شکل ۲۱۳

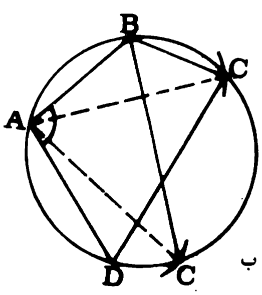
۲۱۳ـ اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد وقطر AC نیمساز زاویه A فرض شود. چون بر روی AB پاره‌خط AE را به‌اندازه AD جداکنیم (یا اگر AD بزرگتر از AB باشد AB را به‌اندازه AD امتداد داده و $AE = AD$ می‌گیریم) دومثلث ADC و AEC متساویند (دوضلع و زاویه بین آنها) و در نتیجه $CD = CE$ است. مثلث EBC را با معلوم بودن سه ضلع می‌توان رسم کرد بنابراین راه‌حل زیر بدست می آید.

ابتداء مثلث BEC را با در دست داشتن اندازه سه‌ضلع آن BC و $EC = DC$ و $EB = AB - AD$ رسم کرده و ضلع BE از نقطه E تا نقطه A به‌اندازه AB (ضلع داده شده چهارضلعی) امتـداد می‌دهیم. A را به‌نقطه C وصل می‌کنیم و مثلث ADC را کـه دو ضلع دیگر آن یعنی AD و DC معلوم است رسم می‌کنیم با تعیین نقطه D چهارضلعی رسم شده است.



شکل ۲۱۴ الف

۲۱۴ـ فرض می کنیم ضلعهای AB و AD و زاویه A وقطر AC معلوم‌باشد. مثلث ABD را کـه دوضلع و زاویه بین آنها معلوم است رسم می‌کنیم و دایـرهٔ محیطی آنرا می کشیم (دایره O) به مرکز A و به‌شعاع AC (قطر چهارضلعی) دایره‌ای‌رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در C رأس دیگـر چهارضلعی قطع کند. (ش ۲۱۴ الف)



شکل ۲۱۴ ب

اگر دایره به مرکز A و به‌شعاع AC دایره محیطی چهارضلعی را در دونقطه روی کمـان BD قطع‌کند‌مسئله‌دوجواب‌دارد.(ش۲۱۴ب)

۲۱۵ـ فرض کنیم چهارضلعی ABCD بـا ضلعهـای $AB = a$ و $CB = b$ و $CD = c$ و $AD = d$ جواب مسئله‌باشد $\hat{A} + \hat{C} = 180°$، مثلث BCD را مطابـق شکل بـه‌وضع

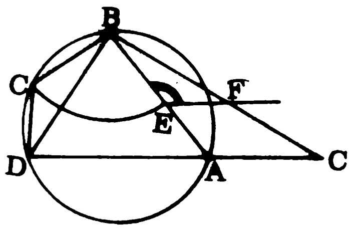
BEF قرار می‌دهیم. چون $\hat{E}+\hat{A}=۱۸۰^\circ$ پس $EF=c$ موازی با AD است و BF امتداد AD را در G قطع می‌کند و می‌نویسیم:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{AG} \quad \text{یا} \quad \frac{BE}{BA}=\frac{EF}{AG}$$

از این تناسب AG جزء چهارم تناسب را با ترسیم می‌توان بدست آورد. همچنین می‌نویسیم

$$\frac{BD}{BG}=\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{BF}{BG}=\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{BF}{BG}=\frac{BE}{BA}$$

بنابراین راه‌حل مسئله چنین است. DG را که برابر است با $AD+AG$ رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌هایی را که فاصله آنها از دو نقطهٔ D و G برابر $\frac{b}{a}$ باشد می‌کشیم[1] و به‌مرکز A کمانی به‌شعاع a رسم می‌کنیم تا مکان مذکور را در B قطع کند. پس از تعیین سه رأس D و A و B رأس C با معلوم بودن b و c بدست می‌آید. (ش ۲۱۵)



شکل ۲۱۵

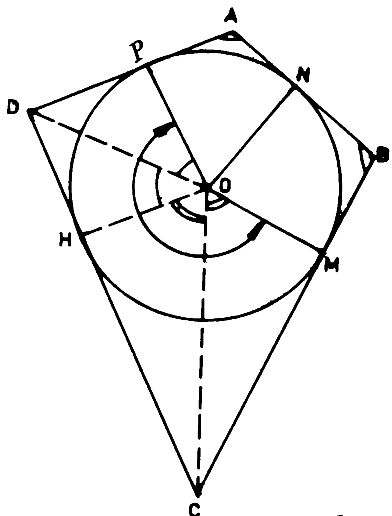
۲۱۶ــ دایره محاطی (O) را رسم می‌کنیم و از مرکز آن دو زاویه مرکزی $\widehat{MON}$ و $\widehat{NOP}$ را به‌ترتیب مساوی $۱۸۰^\circ-\hat{B}$ و $۱۸۰^\circ-\hat{A}$ رسم می‌کنیم و از M و N و P سه مماس بر دایره رسم می‌کنیم. ضلع AB و امتداد AP و امتداد BM مشخص می‌شود.

داریم:

طول محیط

$$CD+AD+AB+BC=۲P$$

وچون چهارضلعی محیطی است می‌توان نوشت.

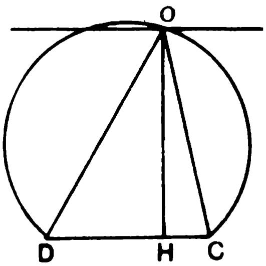


شکل ۲۱۶ الف

۱ــ توضیح این مکان و رسم آن در مسئله ۱۴۲ آمده است.

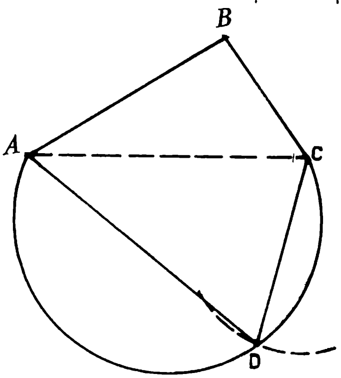
$$AB+CD=AD+BC$$

$$\boxed{CD=P-AB}$$ و یا $۲AB+۲CD=۲P$.



شکل ۲۱۶ ب

در مثلث DOC زاویه $\widehat{DOC}$ مساوی نصف زاویه $\widehat{POM}$ و OH (شعاع دایره) ارتفاع وارد بر CD، آن معلوم است می‌توان این مثلث را رسم کرد به این ترتیب CD را می‌کشیم و خطی موازی CD که فاصله‌اش از آن به‌اندازه OH باشد رسم می‌کنیم و بعد کمان درخور CD با زاویهٔ $\widehat{DOC}$ را رسم می‌کنیم. رأس O معلوم می‌شود و زاویهٔ DOH تعیین می‌گردد بنابراین می‌توانیم آن را دو برابر کرده و منتقل به‌زاویه مرکزی در دایرهٔ O کنیم بطوریکه یك ضلعش OP باشد. ضلع دیگر آن OH است از H مماسی بر دایره رسم می‌کنیم چهارضلعی بدست می‌آید. (ش ۲۱۶)



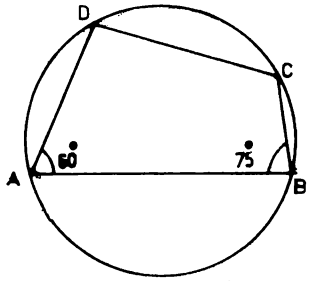
شکل ۲۱۷

۲۱۷ــ اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد. ملاحظه می‌شود که از مثلث ABC ضلع AB و ضلع BC و زاویه B (زاویه بین دو ضلع) در دست است بنابراین، این مثلث‌را می‌توان رسم کرد. رأس D از طرفی بر کمان درخور زاویه معلوم D نظیر به‌وتر AC واقع بوده و از طرف بر محیط دایره‌ای به‌مرکز C و شعاع CD قرار دارد بنابراین:

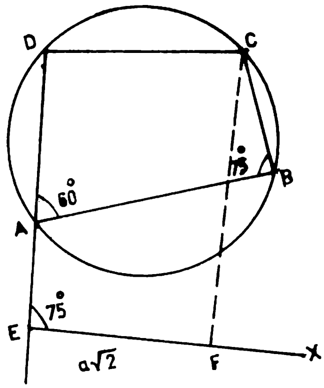
ابتداء مثلث ABC را با معلوم بودن دوضلع و زاویه بین‌آنها رسم می‌کنیم بر وتر AC کمان درخور زاویه معلوم D را طرح می‌نمائیم. به مرکز C و شعاع CD کمانی می‌زنیم تاکمان درخور را قطع کند نقطه تلاقی این دوکمان نقطه D می‌باشد. (ش ۲۱۷)

(از دوکمان درخور مرورکننده بر A و C فقط باید آنرا رسم کرد که با بدست آوردن نقطه D ترتیب رأس‌های ABCD رعایت شود) شرط امکان مسئله آن است که کمان درخور و دایره (CD و C) متقاطع باشند.

۲۱۸ــ اگر بر روی ضلع AD از نقطه دلخواه E زاویه ۷۵° را رسم کنیم، Ex مــوازی با DC است بر روی Ex پاره‌خط $EF=a\sqrt{2}$ را جدا کرده و F را به C وصل می‌کنیم چهارضلعی DCFE متوازی‌الاضلاع است بنابراین برای رسم چهارضلعی ابتداء پاره‌خط $AB=2a$ را رسم کرده و در نقطه A زاویه ۶۰° و در نقطه B زاویه ۷۵° را می‌سازیم. از نقطهٔ اختیاری E واقع بر AD زاویه $\widehat{AEx}$ را مساوی با ۷۵° جدا کرده و $EF=a\sqrt{2}$ را بر آن نقل می‌کنیم از F خطی موازی با ED رسم مـی‌کنیم تا ضلع زاویه B را در نقطه C قطع کند CD را موازی با EF رسم می‌کنیم تـا ضلع دیگر زاویه A را در نقطـه D قطع کند ABCD چهارضلعی مطلوب است. (ش ۲۱۸)

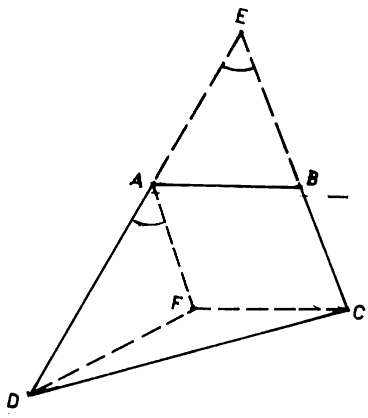


شکل ۲۱۸ الف

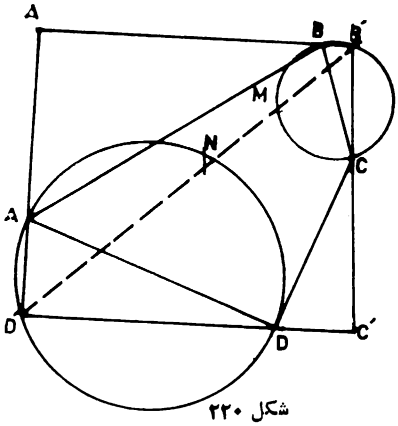


شکل ۲۱۸ ب

۲۱۹ــ اگر مسئله حل شده و ABCD چهار ضلعی مطلوب باشد چـون از این چهارضلعی AB و BC و زاویه $\hat{B}$ و زاویـه $\hat{E}$ و ضلـع AD در دست است، اگر از رأس A بردار $\overrightarrow{AF}$ را همسنگ $\overrightarrow{BC}$ رسم کنیـم چهارضلعی ABCF متـوازی‌الاضـلاع است. از مثلث DAF دو ضلع AD و AF، $(AF=BC)$ و زاویه $\widehat{DAF}$ $(\widehat{DAF}=\hat{E})$ در دست است پس این مثلث را می‌توان رسم کرد. مثلث ABC با معلوم بودن دوضلع AB و BC و زاویه B رسم می‌شود و در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABCF بـدست مـی‌آید با قـرار دادن ضلع مشترک AF از مثلث DAF بر روی AF ضلع متوازی‌الاضلاع، رأس D از چهارضلعی ABCD مشخص می‌شود. (ش ۲۱۹)

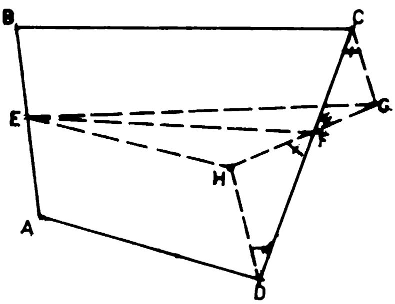


شکل ۲۱۹



شکل ۲۲۰

۲۲۰ـ اگر $A'B'C'D'$ مربع مطلوب باشد. دایره به‌قطر AD بر رأس D' و دایره به قطر BC بر رأس B' می‌گذرد. محل تلاقی $B'D'$ با دو دایره را M و N می‌گذریم نقطه M وسط کمان $\widehat{BMC}$ و نقطه N وسط کمان $\widehat{AND}$ است. بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید: دایره‌ای به‌قطر BC و دایره دیگری به قطر AD رسم کرده و وسطهای دو کمان $\widehat{BC}$ و $\widehat{AD}$ را به‌هم وصل می‌کنیم (M وسط $\widehat{BC}$ و N وسط $\widehat{AD}$) امتداد MN دو دایره را در B' و D' قطع می‌کند از نقطه B' دو خط و از نقطه D' دوخط دیگر چنان رسم می‌کنیم که با $B'D'$ زاویه‌های 45° بسازند این خطها در نقطه‌های A' و C' متقاطع‌اند و مربع $A'B'C'D'$ همان مربع مطلوب است. (ش ۲۲۰)



شکل ۲۲۱

۲۲۱ـ اگر $ABCD$ چهارضلعی مطلوب باشد از نقطه E (وسط AB) خط EG را موازی و مساوی و هم‌جهت با BC و از همین نقطه EH را همسنگ بردار $\overrightarrow{AD}$ می‌کشیم از G و H به F وصل می‌کنیم در دو مثلث CGF و DHF، داریم.

$$DH = GC \ , \ DF = FC$$

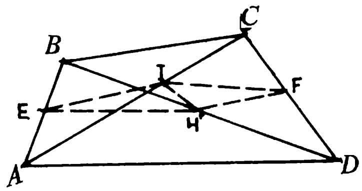
و $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ است بنابراین دومثلث باهم مساویند و لذا $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ است و درنتیجه سه نقطه H و F و G بریك استقامت‌اند. مثلث EHG با معلوم بودن دو ضلع EH و EG و میانه EF قابل رسم است[1] پس از رسم مثلث EHG مثلث HFD با معلوم بودن سه ضلع رسم می‌شود با رسم این مثلث از نقطه D برادر $\overrightarrow{DA}$ را همسنگ $\overrightarrow{HE}$ رسم کرده و AE را به‌اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم از G بردار $\overrightarrow{GC}$ را همسنگ $\overrightarrow{AE}$ رسم کرده بدین ترتیب چهار رأس چهارضلعی $ABCD$ مشخص

---

۱ ـ این مسئله در فصل مربوط به رسم مثلث در شماره ۱۱۲ حل شده است.

می‌شود. (ش ۲۲۱)

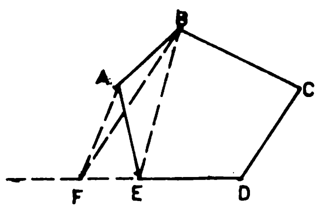
۲۲۲- اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، I وسط قطر AC و H وسط قطر BD و E وسط AB و F وسط CD باشد. در چهار ضلعی EHFI، $\frac{BC}{۲}=$ و $||$ HF و: $\frac{BC}{۲}=$ و $||$ EI بنابراین چهارضلعی EHFI متوازی‌الاضلاع است. مثلث IEH را با داشتن



شکل ۲۲۲

اندازه‌های سه ضلع $\left(EH=\frac{AD}{۲}\right.$ و $\left.EI=\frac{BC}{۲}\right)$ و IH که درمعلوم‌های مسئله داده‌شده می‌توان رسم کرد. از روی مثلث IEH متوازی‌الاضلاع EHFI رسم می‌شود. با رسم متوازی‌الاضلاع طول قطر EF بدست می‌آید. دراین صورت از چهارضلعی ABCD ، اندازه‌های چهارضلع و اندازه پاره‌خطی که وسطهای دوضلع را بهم وصل می‌کند معلوم می‌باشد که این مسئله همان مسئله قبل است. (ش ۲۲۲)

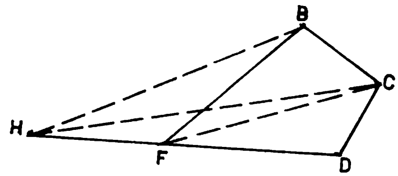
۲۲۳- فرض می‌کنیم پنج ضلعی ABCDE داده شده باشد باید چهارضلعی رسم کرد که مساحت آن با مساحت پنج‌ضلعی برابر باشد، یکی از قطرهای پنج ضلعی مثلا قطر BE را رسم‌کرده و از رأس A خطی موازی این‌قطر رسم می‌کنیم تا امتداد DE را درنقطه F قطع کند. رأس B را به F وصل‌می‌کنیم‌چهارضلعی BCDE معادل با پنج‌ضلعی ABCDE می‌باشد. زیرا اگر از پنج‌ضلعی، مثلث ABE برداشته



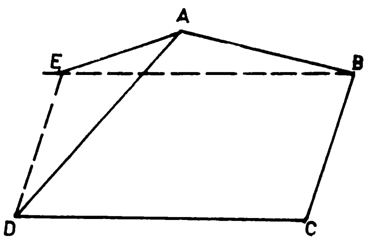
شکل ۲۲۳ الف

و به‌جای آن مثلث FBE را قراردهیم‌مساحت پنج‌ضلعی تغییر نمی‌کند چون دومثلث ABE و FBE به‌علت‌مشترك‌بودن‌قاعده BE وموازی بودن AF با BE معادل‌اند: اما، با برداشتن مثلث ABE و جایگزین کردن مثلث FBE پنج‌ضلعی ABCDE با چهارضلعی FBCD معادل می‌شود. حال می‌توان به‌جای چهارضلعی FBCD مثلثی معادل آن ترسیم کرد در چهارضلعی FBCD قطر CF را رسم‌کرده و از B خطی موازی‌آن می‌کشیم تا امتداد DF را در نقطه H قطع‌کند CH را رسم می‌کنیم مثلث HCD معادل چهارضلعی FBCD

می‌باشد[1]. (ش ۲۲۳)



شکل ۲۲۳ب

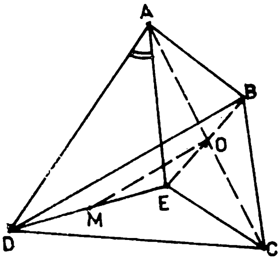


شکل ۲۲۴

۲۲۴ـ اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، چون CD را انتقال دهیم تا C بر B و D به‌وضع E درآید با توجه به‌معلوم بودن زاویه‌های C و B، زاریه $\widehat{ABE}$ مشخص می‌شود بنابراین مثلث ABE را با داشتن ضلعهای AB و BE و زاویه بین‌آنهامی‌توان رسم‌کرد حال با توجه به‌معلوم بودن زاویه‌های A و B، ازاین دونقطه خطهای AD و BC را طوری‌رسم می‌کنیم‌که با AB زاویه‌هائی برابر با A و B تشکیل دهند، سپس‌بین AD و BC قطعه‌خطی موازی و مساوی با BE محصورمی‌کنیم. رأس‌های C و D بدست‌می‌آید. (ش ۲۲۴)

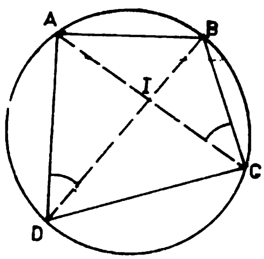
---

۱ ــ از حل این مسئله معلوم شد که همواره می‌توان مثلثی معادل با چند ضلعی مفروضی ترسیم کرد چون تربیع (ترسیم مربعی معادل با) مثلث نیز میسر است (زیرا اگر a یك ضلع مثلث و h ارتفاع وارد برآن باشد ضلع مربعی‌که مساحت آن با مساحت مثلث برابر است از رابطه $x^۲=\frac{ah}{۲}$ بدست می‌آید و از لحاظ ترسیم ضلع مربع واسطه هندسی بین‌طول های a و $\frac{h}{۲}$ است) بنابراین تربیع چندضلعی همواره ممکن می‌باشد. بطورکلی تربیع یك شکل رسم ضلع مربعی است‌که باآن شکل معادل باشد. مثلا تربیع دایره یعنی رسم مربعی‌که مساحتش مساوی مساحت دایره مفروض‌باشد. اگر R شعاع دایره و x ضلع‌مربع مطلوب باشد $x^۲=\pi R^۲$ خواهد بود، لذا اگر بتوان طولی مساوی x رسم کرد رسم پاره‌خطی به طول π ممکن می‌گردد. ریاضیدانهای قدیم‌که π را مقدار منطقی می‌پنداشتند تلاش بسیاری در حل مسئله تربیع دایره باپرگار وستاره نموده‌اند. درطی قرن‌های‌متمادی ریاضیدانهای ملت‌های‌مختلف رساله‌های زیادی درحل این‌مسئله تألیف کرده‌اندکه همه مبنی براشتباهاتی بوده‌است ممکن نبودن حل این‌مسئله با پرگار و ستاره در سال ۱۸۸۲ از طرف لیندمان (Lindemamn) ثابت شد.



شکل ۲۲۵

۲۲۵- اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، هرگاه BC را انتقال دهیم تا B بر A واقع شود و C به‌وضع E درآید مثلث AED با معلوم بودن اندازه‌های دوضلع و زاویه بین آنها رسم می‌شود اگر M وسط DE باشد نقطه O مرکز متوازی‌الاضلاع ABCE از یک طرف بر دایره به مرکز A و شعاع $\frac{AC}{2}$ و از طرف دیگر بر دایره به‌مرکز M و شعاع $\frac{BD}{2}$ قراردارد. نقطه O محل تلاقی این دو دایره است. پس از تعیین نقطه O، از E به O وصل کرده و $OB=OE$ را امتداد می‌دهیم و از A به O وصل کرده $AO=OC$ را جدا می‌کنیم چهارضلعی مشخص می‌شود، (ش ۲۲۵)

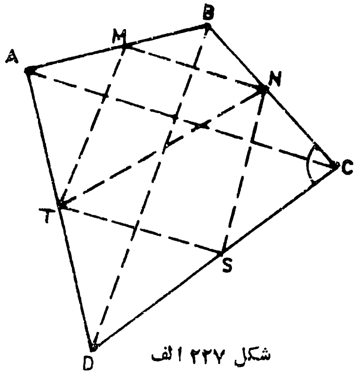


شکل ۲۲۶

۲۲۶- اگر مسئله حل شده و ABCD چهارضلعی مطلوب باشد رأس A برضلع زاویه‌ای واقع است که با BD زاویه‌ای برابر زاویه معلوم ACB می‌سازد و ازطرف دیگر A بر خطی عمود بر BD واقع است بطوریکه $AD^2 - AB^2 = l$ (این مکان درضمن مسئله‌های مربوط به‌رسم مثلث بررسی و ترسیم آن آمده است مسئله ۱۵۷) دایره محیطی مثلث ABD همان دایره محیطی چهارضلعی ABCD است و یک مکان نقطه C روی این دایره می‌باشد. مکان دیگر نقطه C بر خطی واقع است که مجانس قطر BD درتجانس به‌مرکز A ونسبت تجانس $\frac{AC}{AI}=\frac{K+1}{K}$ است بنابراین با رسم BD و تعیین رأس A و رسم دایره محیطی مثلث ABD وتعیین مجانس BD رأس C و درنتیجه چهارضلعی ABCD مشخص می‌شود. (ش ۲۲۶).

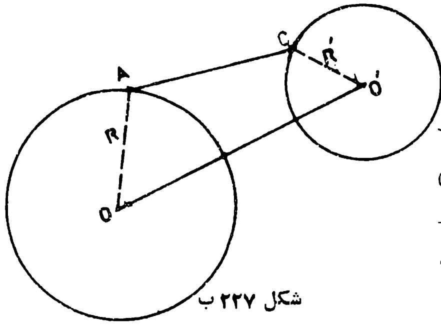
شرط امکان مسئله آن است که مجانس BD درتجانس به‌مرکز A ونسبت $\frac{K+1}{K}$ دایره را قطع کند یا برآن مماس باشد.

مسئله ممکن است دارای دوجواب یا یک جواب باشد یا جواب نداشته باشد.



شکل ۲۲۷ الف

۲۲۷ــ اگر ABCD چهارضلعی مطلوب فرض شود، M وسط AM و S وسط DC اختیار شود چهارضلعی MNST متوازی‌الاضلاع است. (MN و TS موازی و مساوی با نصف AC می‌باشند) هر ضلع متوازی‌الاضلاع نصف قطر نظیر از چهارضلعی می‌باشد و چون TN داده شده است. لذا متوازی‌الاضلاع MNST با داشتن ضلعها و قطر آن (از مثلث NST سه ضلع در دست است) رسم می‌شود و از $\frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AT}=K$ نتیجه می‌شود که A بر مکان هندسی نقطه‌هایی واقع است که نسبت فاصله‌های آنها از M و T مقدار معیین K می‌باشد (این مکان دایره‌ای است که مرکز آن بر MT واقع است و قطرش بر دو نقطه M' و T' که مزدوجهای توافقی M و T با نسبت K می‌باشند می‌گذرد[1]). نقطه C بر کمان درخور زاویه معیین c که ضلعهای آن از دو نقطه N و S می‌گذرند قرارداد. اکنون باید قطعه‌خطی به‌طول معیین c وامتداد ثابت را بین دو دایره محصور کرد تا AC مشخص می‌شود. یعنی مسئله به‌حل مسئله زیر منجر می‌شود. (ش ۲۲۷)



شکل ۲۲۷ ب

قطعه خط AC به‌طول معین و به امتداد معلوم را محصور بین دو دایره مفروض C و C' رسم کنید.

اگر AC پاره‌خط مطلوب باشد مسئله به‌رسم چهار ضلعی $OAC'O$ می‌رسد که از آن چهارضلع AC، R و R'، OO' و زاویه بین AC و OO' داده شده است این ترسیم در حل مسئله ۲۱۲ آمده است.

۲۲۸ــ اگر مسئله‌را حل شده فرض کنیم و نقطه D جواب مسئله باشد چون چهارضلعی ABCD محیطی است پس باید

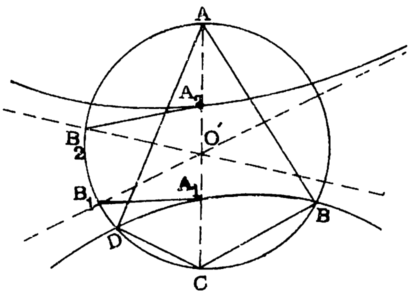
$$AB+CD=AD+BC$$

و یا

$$AB-BC=AD-CD$$

۱ــ این مکان در ضمن مسئله‌های مربوط به‌رسم مثلث توضیح داده شده است مسئله ۱۴۲.

$$AD-CD=a-b \quad \text{و} \quad AB-BC=a-b$$



شکل ۲۲۸

است چون a و b هردو مقدارهای ثابتی هستند پس $a-b$ مقداری است ثابت. یعنی تفاضل فاصله‌هـای نقطه D از دونقطه ثابت A و C مقدار ثابتی است لذا نقطه D متعلـق به‌یك هذلولی است که A و C کانونهای آن و $a-b$ مقدار ثابت تفاضل فاصله‌های نقطه‌های مربوط به‌مکان است. حال اگر هذلولی را رسم کرده ومحل تلاقی آن را با دایره بدست آوریم نقطه D بدست می‌آید.

طریقه رسم هذلولی: نقطه O' وسط AC را تعیین کرده ودر دوطرف آن طولهـای $O'A_1=O'A_2=\frac{a-b}{2}$ را جدا می‌کنیم نقطه‌های A_1 و A_2 رأسهای هذلولی می‌باشند ازاین دو نقطه عمودهایی بر AC دریك طرف آن اخـراج کرده وبه‌مرکز O' و شعـاع $\frac{AC}{2}$ (نصف فاصله کانونی) کمانی رسم مـی‌کنیم تا عمودها را در B_1 و B_2 قطـع کند خطهای $O'B_1$ و $O'B_2$ مجانبهای هذلولی هستند وشاخه‌های هذلولی دایره‌را درچهار نقطه که یکی‌ازآنها همان نقطه B است قطع می‌کند، از روی شکل ملاحظه می‌شود که فقط نقطه D جواب مسئله است زیرا چهارضلعی باید محدب بوده وبعلاوه $AD>DC$ باشدوداریم:

$$AD-CD=a-b$$

ازطرف دیگر $AB=a$ و $BC=b$ می‌باشد وبنابراین:

$$AB-BC=a-b$$

درنتیجه:

$$AD-CD-AB-BC$$

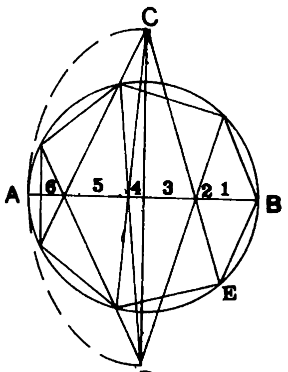
و یا

$$AD+BC=CD+AB$$

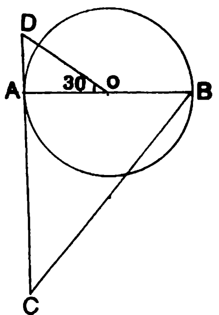
یعنی چهارضلعی ABCD محیطی می‌باشد (ش ۲۲۸).

فصل ششم

حل مسئله‌های مربوط به‌دایره



شکل ۲۲۹

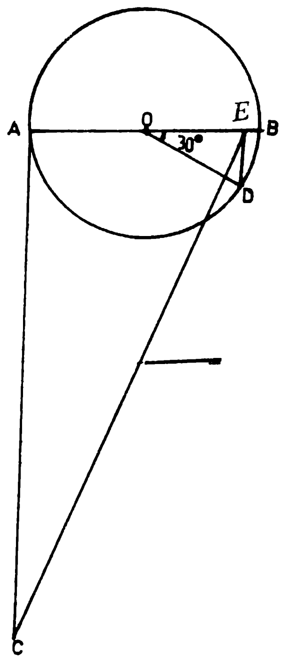


شکل ۲۳۰ الف

۲۲۹ــ برای تقسیم دایره مفروض (R و O) مثلاً به‌هفت قسمت متساوی قطر آن‌را به‌هفت قسمت متساوی تقسیم کـرده و به‌مرکزهای دو انتهای قطر (A و B) وشعاع قطر، کمانهایی رسم می‌کنیم تا عمودمنصف قطـررا در C و D قطع کند. نقطهٔ‌های C و D را به‌طوری‌که درشکل دیده می‌شود به‌نقطه‌های دوم وچهارم وششم تقسیم وصل می‌کنیم رأس‌های‌هفت‌ضلعی مشخص‌می‌شود. ممکن‌است پس‌ازتعیین‌نقطه C وبدست‌آوردن نقطهE، BE راکه ضلع هفت ضلعی منتظم‌است بردایره نقل‌کرد. (ش۲۲۹) باید توجه داشت این‌طریق تقریبی است ولی برای رفع نیازمندیهای عملی‌کافی می‌باشد.

۲۳۰ــ راه اول‌ــ قطر AB ومماس نقطه A را رسم‌کردهٔ و $\widehat{AOD}$ را مساوی°۳۰ وDC را مساوی ۳R جدامی‌کنیم. BC مقدارتقریبی

نصف محیط دایره است «با محاسبه BC (درمثلث قائم‌الـزاویه ABC) معلوم می‌شودکه BC #۳/۱۴۱۵R» (ش ۲۳۰).

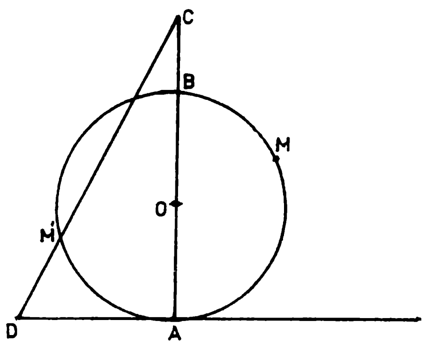


شکل ۲۳۰ ب

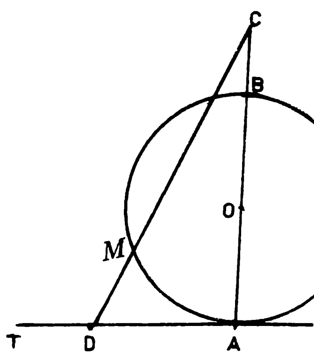
راه دوم- قطـر AB ومماس AC=۶R و زاویه $\widehat{BOD}$ مساوی ۳۰° و عمـود DE را رسم می‌کنیم. EC مقدارتقریبی محیط دایره است.

«بامحاسبه EC درمثلث EAC معلوم می‌شود که EC=۲R×۳/۱۴۱۵» راه سومی هم برای این ترسیم وجود داردکه از ذکـرآن صرفنظرشده است.

۲۳۱- اگرکمان $\widehat{AM}$ کوچکتر از $\frac{\pi}{۲}$ بـاشد قطر AB ومماس At را می‌کشیم و BC را مساوی $\frac{۳R}{۴}$ جداکرده‌و CM را وصل‌می‌کنیم طول AD مقدار تقـریبی طـول کمان $\widehat{AM}$



شکل ۲۳۱ ب



شکل ۲۳۱ الف

است اگرکمان $\frac{\pi}{۲} < \widehat{AM} < \pi$ باشدکمانی برابر با $\frac{\widehat{AM}}{۲}$ جـدا کـرده مانند قبل عمـل می‌کنیم. اگرکمان $\widehat{AM} > \pi$ باشدکمانی برابربا $\frac{\widehat{AM}}{۴}$ جداکرده ومانند حالت اول‌عمل

می‌کنیم. (ش ۲۳۱)

$$\widehat{AM'}=\frac{\widehat{AM}}{۴}$$

$$AD \# \widehat{AM'}$$

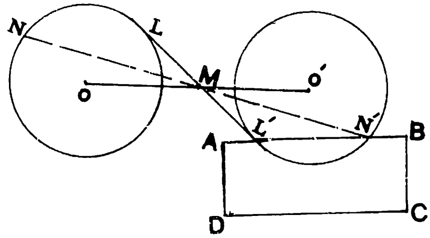
$$۴AD \# ۴\widehat{AM'}=\widehat{AM}$$

به‌کمك ترسیم مسئله بالا می‌توان دومسئله زیر را حل کرد.

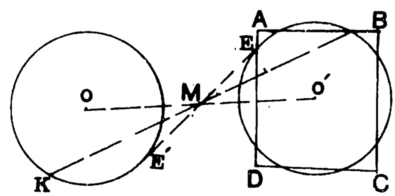
۱ــ بر دایره مفروضی کمانی به‌طول معیین l جدا کنید.

۲ــ کمان مفروضی را به n قسمت متساوی تقسیم کنید.

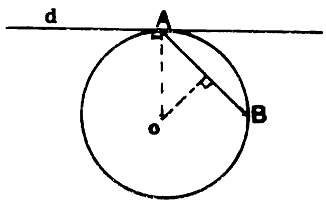
۲۳۲ــ اگر مسئله حل شده باشد و E و E′ دونقطه از نقطه‌های منظور باشند چون M وسط EE′ است پس E و E′ قرینه یکدیگر نسبت به‌نقطه M می‌باشند، بنابراین راه زیر برای ترسیم بدست می‌آید: قرینه دایره (O) را نسبت به نقطه M رسم می‌کنیم دایره (O′). نقطه‌های مشترك بین دایره (O′) ومستطیل ABCD جواب‌های مسئله‌اند. بیشترین تعداد جواب‌ها هشت جفت نقطه می‌باشدکه نقطه‌های تلاقی ضلعهای مستطیل با دایره (O′) می‌باشد. وجود وتعداد جوابها بستگی به‌وضع دایره (O′) ومستطیل ABCD دارد. (ش ۲۳۲)



شکل ۲۳۲ب

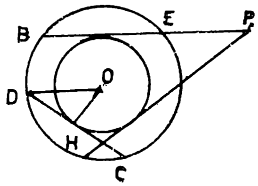


شکل ۲۳۲الف

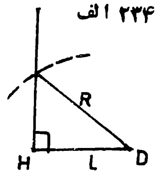


شکل ۲۳۳

۲۳۳ــ مرکز دایره مطلوب برروی‌عمودمنصف AB وبرروی خطی است‌که ازنقطه A برخط d عمود شود دایرهٔ مطلوب به‌مرکز O وشعاع OA می‌باشد. (ش ۲۳۳)



شکل ۲۳۴ الف

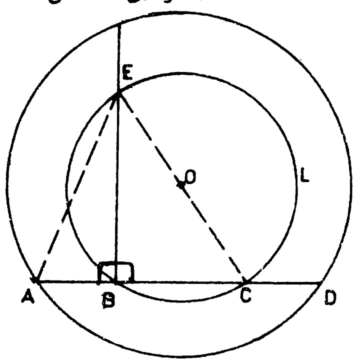


شکل ۲۳۴ ب

۲۳۴ـ ابتداء در دایرهٔ O وتر CD را بطول L رسم می‌کنیم به مرکز O دایـره‌ای رسم می‌کنیم که بر CD مماس شود و از P قاطع PEB را بـر دایرهٔ مذکور مماس می‌کنیم، BE برابر CD خـواهد شد و بـرای اینکه مسئله دارای جواب بـاشد بـاید L از قطر دایره O کوچکتر باشد. (ش ۲۳۴)
مسئله دو جواب دارد.

$$OH^{۲} = OD^{۲} - DH^{۲} = R^{۲} - \frac{l^{۲}}{۴}$$

۲۳۵ـ اگـر مسئله حـل شده بـاشد، بـاید $AB = \hat{B}C = CD$ باشد. اگر از B عمودی بر AB اخراج شود و نقطه برخورد این عمود با دایره کوچکتر، E فرض شود با توجه به‌آنکه BE عمود منصف AC می‌باشد پس $AE = CE$ اما CE قطر دایره (L) می‌باشد «چون $\hat{B} = ۹۰^{\circ}$» بنابراین راه‌حل مسئله به‌طریق زیر بدست می‌آید:

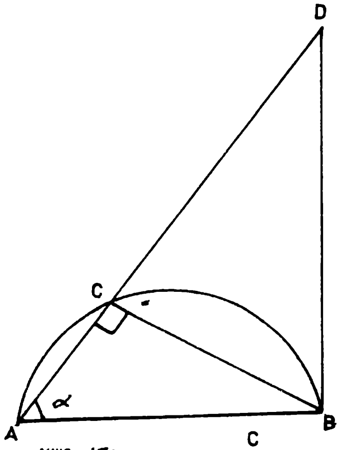


به مرکز A و شعاع برابر با قطر دایره (L) کمانی رسم می‌کنیم تا دایره (L) را در E قطع کند.
E را به‌نقطه O مرکز مشترك دو دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تـا محیط دایره (L) را در نقطه C قطع کند قاطع ABCD جواب مسئله است. (ش ۲۳۵)

شرط امکان مسئله آن است که دایره به مرکز A و شعاع برابر با قطر دایره (L) دایره (L) را قطع کند و یا بر آن مماس (مماس خارج) باشد. درصورتیکه دایره رسم شده به مرکز A و شعاع برابر با قطر دایره (L)، دایره (L) را در دو نقطه قطع کند مسئله دوجواب دارد. اگر بر آن مماس شود مسئله یك جواب دارد، درصورتیکه با دایره (L) متخارج باشد جواب ندارد.

۲۳۶ـ اگر مسئله حل‌شده و $AD = ۴AC$ باشد با فرض آنکه $AC = x$، $AD = ۴x$ و $CD = ۳x$ می‌باشد.

$$\overset{\Delta}{ACB} \Longrightarrow BC^{۲} = AB^{۲} - x^{۲}$$



شکل ۲۳۶

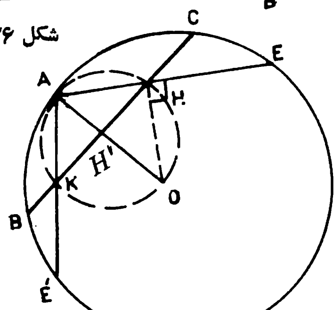
در مثلث قائم‌الزاویه ABD، پاره‌خط BC ارتفاع وارد بر وتر است و لذا:

$$BC^{2}=AC\cdot CD=x\times 3x=3x^{2}$$

$$3x^{2}=AB^{2}-x^{2}\Longrightarrow AB=2x$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $AB=2x$ و $AC=x$ است بنابراین زاویه $\widehat{ABC}=30^{\circ}$ و در نتیجه $\alpha=60^{\circ}$ است پس باید قاطع ACD را طوری رسم کرد که زاویه ACD با قطر AB برابر 60° باشد. (ش ۲۳۶)

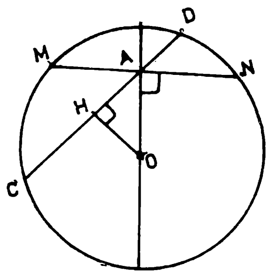
۲۳۷ــ اگر AE وتر مطلوب باشد از O به H وصل می‌کنیم چون H وسط AE است است بنابراین $AE\perp OH$ خواهد بود و مثلث OAH در رأس $\hat{H}$ قائمه‌است‌بنابراین دایره‌ای به‌قطر AO رسم می‌کنیم تا BC در H قطع کند. (ش ۲۳۷)



شکل ۲۳۷

شرط وجود جواب آن است که دایره به‌قطر AO وتر را قطع کند و یا بر آن مماس باشد. مسئله ممکن است دو جواب یا یك جواب داشته باشد یا بدون جواب باشد.

۲۳۸ــ وتری که از A بر AO عمود شود. کوتاهترین وتری است که از نقطهٔ A عبور می‌کند زیرا دراین‌صورت OA بزرگترین فاصلهٔ مرکز تا وترهائی است که از A عبور می‌کنند. (ش ۲۳۸)

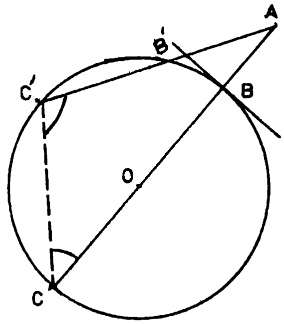


شکل ۲۳۸

$$OA>OH\Longrightarrow MN<CD$$

۲۳۹ــ نقطهٔ A را به مرکز دایره وصل می‌کنیم تا قطری از دایره رسم شود، فاصله‌های نقطهٔ A از دو انتهای این قطر کوچکترین و بزرگترین فاصله این نقطه است نسبت به‌نقطه‌های دیگر دایره. زیرا اگر خط دیگری رسم‌کنیم‌که دایره را در نقطه‌های B' و C' قطع‌کند و از B مماسی بر دایره رسم کنیم ملاحظه می‌شود‌که $AB'>AB$

است. در مثلث $AC'C$ ملاحظه می‌شود که:



شکل ۲۳۹

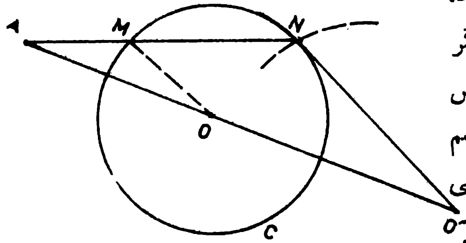
$$\widehat{AC'C}=\frac{\widehat{B'B}+\widehat{BC}}{2}$$ یا:

$$\widehat{AC'C}=\frac{\widehat{B'B}}{2}+90^\circ$$ و

و یا: $$\widehat{C'CA}=\frac{\widehat{BC'}}{2}$$

$$\widehat{C'CA}=\frac{\widehat{CB}-\widehat{CC'}}{2}$$ و

$\widehat{C'CA}=90^\circ-\frac{\widehat{CC'}}{2}$ که در نتیجه: $\widehat{AC'C}>\widehat{C'CA}$ و لذا $AC'<AC$ (ش ۲۳۹)



شکل ۲۴۰

۲۴۰ــ اگر M و N نقطه‌های مطلوب باشند. نقطه N از طرفی بردایره C و از طرف دیگر بردایره C' مجانس دایره C با مرکز تجانس A و نسبت تجانس K واقع است برای رسم دایره C'، خط AO را تا نقطهٔ O' به‌قسمی امتداد می‌دهیم که $\frac{O'A}{OA}=K$ باشد. به‌مرکز O' و شعاع KR دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره C را در N قطع کند از N به A وصل می‌کنیم نقطه تلاقی NA با دایره، M را مشخص می‌کند. شرط امکان مسئله آن است که مثلث ONO' وجود داشته باشد و لذا لازم است که:

$$O'N<OO'+ON \quad \text{و} \quad ON<OO'+O'N \quad \text{و} \quad OO'<ON+O'N$$

اما با توجه به اینکه:

$$OO'=AO'-AO=Kd-d=(K-1)d$$

(AO مساوی d فرض شده است)

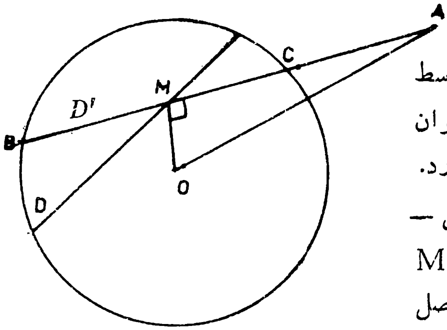
و یا:

$$KR<(K-1)d+R \quad \text{و} \quad R<(K-1)d+KR \quad \text{و} \quad (K-1)d<(K+1)R$$

و نتیجه حاصل به‌صورت:

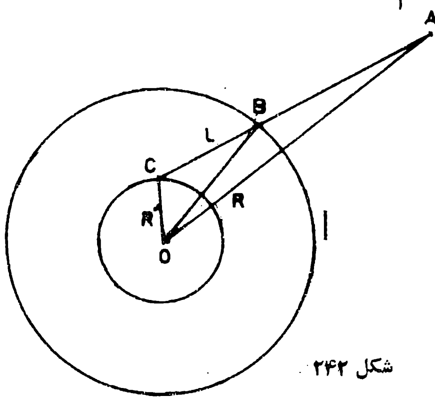
$$R<d<\left(\frac{K+۱}{K-۱}\right)R$$

است. (ش ۲۴۰)



شکل ۲۴۱

۲۴۱ـ اگر BC وتر مطلوب ونقطه M وسط آن باشد $OM \perp BC$ است بنابراین‌می‌توان به‌طریق زیر وتر مطلوب را بدست آورد. دایره‌ای به‌قطر OA رسم می‌کنیم محل تلاقی این دایره با وتر مفروض D، نقطه M وسط وترمطلوب D' است. از A به M وصل کرده خط حاصل دایره را در B و C قطع می‌کند، BC وتر مطلوب‌است. شرط امکان مسئله آن است‌که فاصله مرکز دایره به‌قطر OA از وتر D کوچکتر از شعاع این دایره یعنی $\frac{OA}{۲}$ باشد. (ش ۲۴۱)



شکل ۲۴۲

۲۴۲ـ اگر مسئله حل شده و ABC قاطع مطلوب باشد، ملاحظه می‌شودکه سه‌ضلع مثلث OCB دردست‌است وبنابراین زاویه OCB معلوم می‌شود، نقطه C ازطرفی بر محیط یکی از دایره‌های مفروض واقع است و از طرف دیگر بر مکان هندسی نقطه‌هایی قرار دارد که ازآنها قطعه خط OA به‌زاویه معیین $\widehat{OCA}$ دیده می‌شود بنابراین:

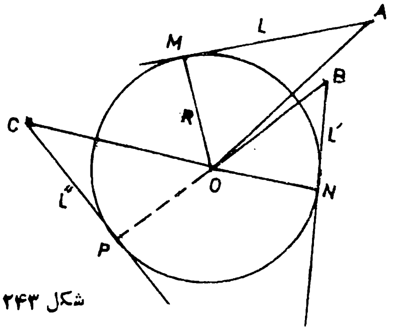
مثلث OCA را با داشتن سه ضلع l و R و R' رسم کرده و از روی آن زاویه $\widehat{OCA}$ را مشخص‌می‌کنیم، دایره شامل‌کمان درخور زاویه $\widehat{OCA}$ نظیر به‌وتر OA را رسم می‌کنیم محل تلاقی این‌کمان درخور و دایره مفروض رأس C می‌باشد، از C به A وصل‌کرده تا نقطه B بدست‌آید. (ش ۲۴۲)

شرط امکان مسئله آن است‌که:

$$|l-R|<R'<l+R \text{ و } |l-R'|<R<l+R' \text{ و } R-R'<l<R+R'$$

باشد.

۲۴۳ـ اگر دایره (R و O) دایره مطلوب باشد.



شکل ۲۴۳

$$\overset{\Delta}{AMO} : l^{2}+R^{2}=OA^{2}$$
$$\overset{\Delta}{BNO} : l'^{2}+R^{2}=OB^{2}$$
$$\overset{\Delta}{CPO} : l''^{2}+R^{2}=OC^{2}$$

و یا

$$OA^{2}-OB^{2}=l^{2}-l'^{2} \quad (1)$$
$$OA^{2}-OC^{2}=l^{2}-l''^{2} \quad (2)$$

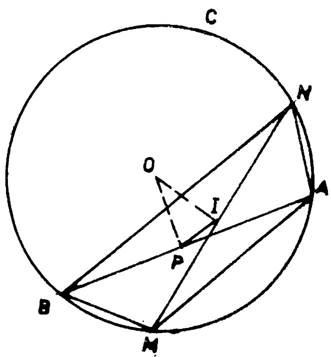
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که O محل تلاقی دومکان هندسی است که هریك از آن‌دو، مکان هندسی نقطه‌هایی است که تفاضل مربعهای فاصله‌های آنها از دونقطه (B و A) و (C و A) برابر مقدارهای ثابت $l'^{2}-l^{2}$ و $l''^{2}-l^{2}$ می‌باشد این مکانها هریك خطی است راست و عمود بر AB و AC (در قسمت حل مثلث این مکان توضیح وطرز ترسیم آن آمده است مسئله ۱۵۷) بنابراین دومکان هندسی ذکر شده را رسم کرده و نقطه تلاقی دوخط را تعیین می‌کنیم. با تعیین نقطهٔ O مرکز دایره و OA و l شعاع دایره بدست می‌آید. (ش ۲۴۳)

شرط امکان مسئله آن است که دوخط مکان Δ و Δ' متوازی نباشند و برای این‌منظور لازم است که A و B و C بر یك استقامت نباشند.

۲۴۴ـ اگر AM و BN وترهای مطلوب باشند، چهارضلعی AMBN ذوزنقه متساوی‌الساقین است. اگر از P وسط قطر AB به I وسط MN وصل کنیم پاره‌خط

$$OI=OP \text{ و } PI=\frac{BN-AM}{2}=l$$

(در ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها با یکدیگر مساویند، دریك دایره دو وتر متساوی ازمرکز دایره به‌یك فاصله‌اند)

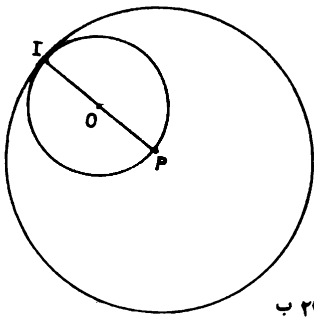


شکل ۲۴۴ الف

بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید:

نقطه P وسط AB را تعیین کرده و به مرکز O و شعاع OP دایره رسم می‌کنیم (نقطه I وسط MN برروی این‌دایره واقع است) به‌مرکز P وشعاع l دایره دیگری رسم می‌کنیم محل تلاقی این دو دایره نقطه I می‌باشد. PI را وصل کرده و از A و B دو وتر موازی PI در دایره رسم می‌کنیم و وترهای AM و BN بدست می‌آیند. (ش ۲۴۴)

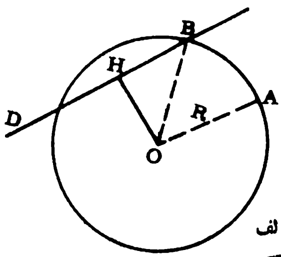
شرط امکان مسئله آن است که دو دایره (OP و O) و (l و P) متقاطع باشند که در این صورت دو نقطه مانند I بدست می‌آید و مسئله دو جواب دارد. اگر دو دایره مذکور مماس باشند (چون نقطه P مرکز دایره (l و P) بر محیط دایره (OP و O) واقع است لذا اگر دو دایره مماس باشند، حالت مماس داخل فقط وجود دارد)، چون OP بر AB و OI بر MN عمود می‌باشد در این وضع لازم است AB و MN موازی شوند ولی قطرهای ذوزنقه همواره متقاطع‌اند و لذا اگر دو دایره مماس شوند مسئله جواب ندارد. برای متقاطع بودن دو دایره باید $|l-OP|<OP<OP+l$ که از آن نتیجه می‌شود: $2OP>l$



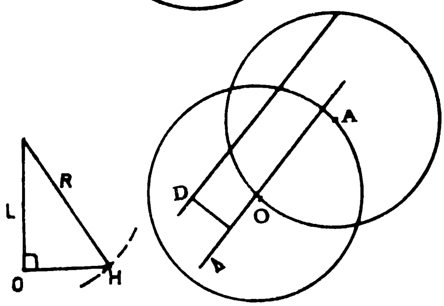
شکل ۲۴۴ ب

۲۴۵ـ اگر مسئله حل شده باشد، نقطه O مرکز دایره مطلوب به فاصله $OA=R$ از نقطه A واقع است از طرف دیگر نقطه O مرکز دایره به فاصله $OH=\sqrt{R^2-l^2}$ از خط مفروض D قرار دارد. یعنی بر روی خطی موازی D و به فاصله OH از آن واقع است بنا بر این:

دایره‌ای به مرکز A و شعاع R رسم می‌کنیم وخط Δ را به موازات D و به فاصله OH از آن می‌کشیم محل برخورد خط Δ و دایره (R و A) مرکز دایره مطلوب است. شرط امکان مسئله آن است که خط Δ و دایره (R و A) متقاطع یا مماس باشند. (ش ۲۴۵)



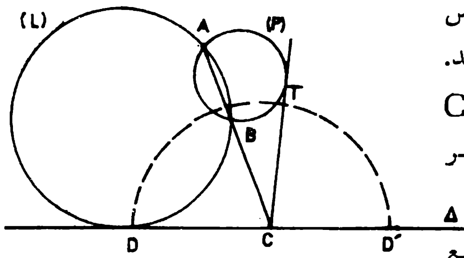
شکل ۲۴۵ الف



شکل ۲۴۵ ب - ج

۲۴۶ـ اگر (L) دایره مطلوب و D نقطه تماس آن با خط Δ و C نقطه تلاقی AB و Δ باشد. CD واسطه هندسی پاره‌خطهای CB و CA است، بنا بر این راه‌حل مسئله بصورت زیر بدست می‌آید:

AB را امتداد داده تا Δ را در نقطه C قطع کند، سپس واسطه هندسی پاره‌خطهای CA و

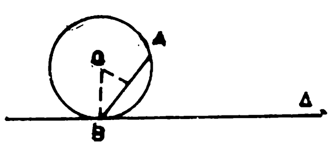


شکل ۲۴۶ الف

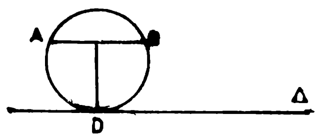
CB را بدست می‌آوریم برای این منظور بر A و B دایره دلخواهی مانند P مرور داده و از C مماس CT را بر آن رسم مـی‌کنیم CT واسطه هندسی دو پاره‌خط CA و CB است. حال به‌مرکز C وشعاع CT کمانی می‌زنیم محل تلاقی این‌کمان با Δ نقطه‌های D' و D می‌باشد دایره‌های‌گذرنده بر D و B و A و یا بر D' و B و A جوابهای مسئله‌اند. شرط امکان مسئله آن است‌که رسم مماس بر دایره (P) میسر باشد بنابراین اگر C داخل این دایره یعنی بین A و B باشد. امکان‌پذیر نخواهد بود پس اگـر دو نقطه A و B در دوطرف خط Δ باشد مسئله غیرممکن است و درغیر این صورت یعنی اگر A و B در یك طرف Δ باشند مسئله همواره دارای دوجواب است چون در این حالت نقطه C در خارج هر دایره‌ای خواهد بودکه بر A و B مـی‌گذرد و لذا همواره از نقطه C می‌توان مماسی بر دایره (P) رسم‌کرد و دونقطه D و D' را تعیین کرد. (ش ۲۴۶)

در حالت خاصی که یکی از دونقطه A و B مثلاً B بر Δ واقع باشد مرکز دایره مطلوب محل تلاقی عمود منصف AB و عمود رسم شده از B بر Δ می‌باشد و دراین‌حالت مسئله همواره دارای جواب است. (ش ۲۴۶ ب)

و بالاخره اگـر AB با Δ موازی باشد، نقطه تماس دایره مطلوب با Δ محل تلاقی عمودِمنصف AB با Δ است و دایره مطلوب بر سه‌نقطه A و B وD می‌گذرد.(ش۲۴۶ج)

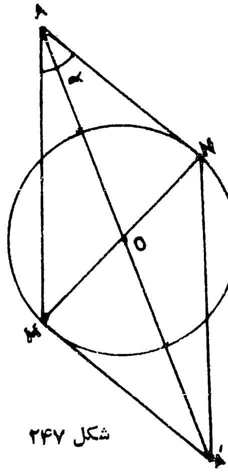


شکل ۲۴۶ ب



شکل ۲۴۶ج

۲۴۷- اگـر MN قطر مطلوب بـاشد زاویه $\widehat{MAN}=\alpha$ است، قرینه نقطه A را نسبت به‌نقطه O (مرکز دایره) تعیین می‌کنیم A' بدست می‌آید. چهارضلعی $AMA'N$ متـوازی‌الاضلاع است کـه یك قطر آن $AA'=۲OA$ و زاویـه $\widehat{MAN}=\alpha$ و قطر $MN=۲R$ نیز معلوم می‌باشد . زاویه AMA' مکمل زاویه MAN بوده و اندازه آن $۱۸۰^\circ-\alpha$ معیین می‌باشد. نقطه M بر دایره مفروض واقع است و ازطرف دیگر بر کمان درخور زاویه مکمل‌زاویه α مرورکننده، بر وتر AA' قرار دارد. بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. نقطه A را به O وصل کرده و به اندازه خود تا نقطه A' امتداد می‌دهیم.



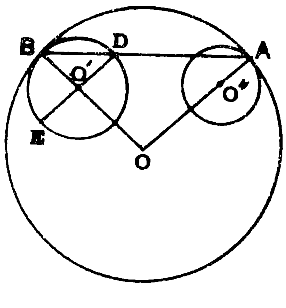
شکل ۲۴۷

کمان درخور زاویه $\alpha - {}^\circ ۱۸۰$ را بر وتر AA' طرح می‌کنیم نقطه تلاقی این کمان درخور با دایره (O) نقطه M می‌باشد با تعیین M قطر MON را رسم می‌کنیم. قطر MN همان مطلوب مسئله است. (ش ۲۴۷)

شرط امکان مسئله آن است که کمان درخور مذکور دایره (O) را قطع کند. یا بر آن مماس باشد اگر کمان درخور و دایره (O) دو نقطه تقاطع داشته باشند مسئله دو جواب دارد.

درصورتیکه کمان درخور بر دایره مماس شود مسئله فقط یك جواب دارد.

اگر کمان درخور و دایره (O) نقطه مشترك نداشته باشند مسئله جواب ندارد.



شکل ۲۴۸

۲۴۸ـ اگرمسئله حل شده فرض شود و دایره (L) دایره مطلوب باشد. و A و B نقطه‌های تماس دو دایره O' و O'' با دایره O فرض شود سه نقطه A و O'' و O و همچنین B و O' و O بر یك استقامت می‌باشند اگـر O' را به‌نقطه D (محل تلاقی AB با دایره O') وصل کنیم‌مثلث $BO'D$ متساوی‌الساقین وچون در زاویه B با مثلث BOA مشترك است.

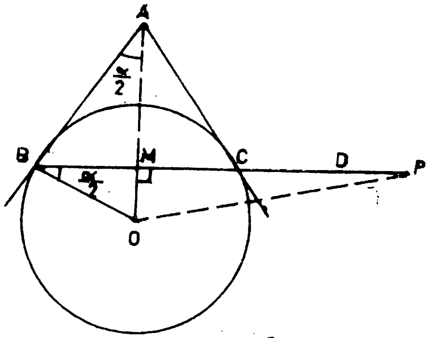
لازم می‌آید $OA \| O'D$ باشد بنابراین راه حل زیر بدست می‌آید.

A را به O'' وصل کرده و از نقطه O' خطی موازی با AO'' می‌کشیم تا محیط دایره O' را در D و E قطع کند AD را رسم می‌کنیم تا محیط دایره O' را در B قطع کند. نقطه تلاقی BO' و AO''، مرکز دایره مطلوب و شعاع آن OA مـی‌باشد. همین روش ترسیم را می‌توان درمورد نقطه E عمل کرد و دایره دیگری بدست آورد شرط امکان مسئله آن است که BO' و AO'' متوازی نباشند.

۲۴۹ـ اگر D وتر مطلوب باشد ملاحظه می‌شود که AO بر BC عمود و از وسط آن (نقطه M) می‌گذرد لذا نقطه M بر دایره‌ای به‌قطر PO قراردارد از طرف دیگر در مثلث BMO داریم:

$$OM = OB \cdot \sin\frac{\alpha}{۲} = R \cdot \sin\frac{\alpha}{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی M بر دایره (L) به مرکز O و شعاع $R \sin \frac{\alpha}{2}$ واقع است بنابراین راه‌حل زیر بدست می‌آید.

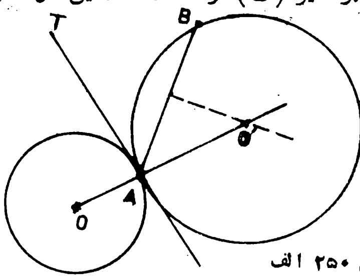


شکل ۲۴۹

به‌قطر PO دایره‌ای رسم می‌کنیم، به‌مرکز O و شعاع OM دایره (L) را مـی‌کشیم نقطه M وسط وتر BC مـی‌باشد از نقطه P خطی بر OM عمود می‌کنیم تا محیط دایره را در نقطه‌های B و C قطع کند مماس‌های رسم‌شده بـر نقطه‌های B و C یکدیگر را در A قطع می‌کند و $\widehat{BAC}$ مساوی α می‌باشد. (ش ۲۴۹)

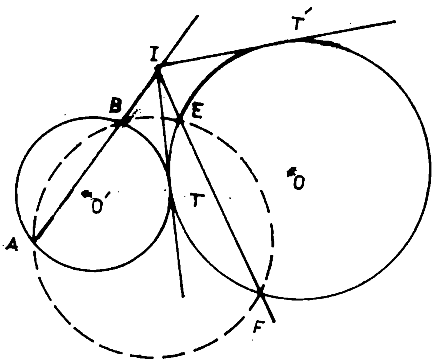
۲۵۰ــ یادآوری می‌کنیم که هرگاه دو دایره برهم مماس باشند تمام نقطه‌های یکی از آن دو، جزء نقطه تماس در خارج یا داخل دیگری است پس هرگاه یکی از نقطه‌های A و B درخارج و دیگری در داخل دایره (O) باشد یا هردو بر دایره (O) قرارداشته باشند مسئله نشدنی است و در غیراینصورت دوحالت می‌توان تشخیص داد.

حالت اول ــ یکی‌ازنقطه‌های مفروض مثلاً A بر دایره(O) قراردارد دراین‌صورت نقطه تماس دایره مطلوب با دایره (O) نقطه A می‌باشد و چون از A مماس AT را بر دایره (O) رسم‌کنیم مسئله به‌رسم دایره‌ای‌که بر B می‌گذرد و در A بر AT مماس‌می‌شود منجرمی‌شود و این مسئله تنها یك‌جواب دارد. (ش ۲۵۰ ش الف)



شکل ۲۵۰ الف

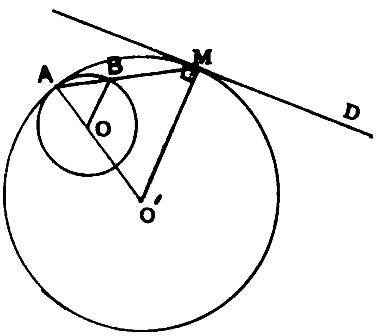
حالت دوم ــ اگر A و B هردو در داخل یا هردو درخارج دایره (O) باشند بر نقطه‌های A و B دایره دلخواهی مـانند (O') مرور می‌دهیم که دایره (O) را در دونقطه مانند E و F قطع‌کند. اگرخط EF با AB درنقطه‌ای مانند I متلاقی باشد I در خارج دایره (O) و برمحور اصلی این‌دایره و دایره مطلوب واقع است وچون دایره مطلوب باید بر دایره (O) مماس باشد هرگاه از I مماس‌های IT و IT' را بـر دایره (O) رسم کنیم نقطه T یا نقطه T' نقطه تماس دایره مطلوب با دایره (O)



شکل ۲۵۰ ب

خواهد بود و لذا دایره‌های مرورکننده بر A و B و T یا A و B و T' جوابهای مسئله‌اند. بطوریکه ملاحظه می‌شود دراین حالت مسئله دوجواب دارد ترسیم بالا با این فرض بود که EF و AB تلاقی داشته باشند. اگر EF با AB موازی باشد مرکزدایره مطلوب بر عمود وارد از O بر AB واقع است. لذا نقطه‌های T و T' همان نقطه‌های تقاطع این عمود با دایره (O) هستند. (ش ۲۵۰ ب)

هرگاه خط AB بر دایره (O) مماس باشد یکی‌ازنقطه‌های T و T' بر AB واقع است و لذا مسئله دراین حالت فقط یك جواب دارد.

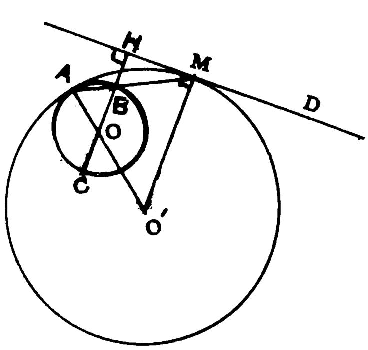


شکل ۲۵۱ الف

۲۵۱ـ اگر مسئله حل شده فرض شود و دایره به‌مرکز O' وشعاع OM دایره مطلوب باشد نقطه A، محل تماس دودایره با هم و سه نقطه A و O و O' بر یك استقامت و $O'A = O'M$ است. اگراز A به‌نقطه M (محل تماس خط D با دایره مطلوب) وصل‌کنیم این خط دایره (O) را درنقطه B قطع‌می‌کند و $O'M \| OB$ است‌زیرا اگر ازنقطه O خطی موازی $O'M$ رسم‌کرده و فرض‌کنیم این خط، AM را در نقطه B' قطع می‌کند لازم است داشته باشیم:

$$\frac{OB'}{{}'OM}=\frac{OA}{O'A}\Longrightarrow\frac{OB'}{{}'R}=\frac{R}{R'}$$

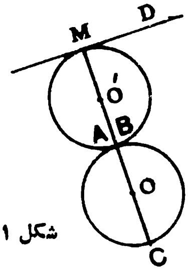
از تناسب اخیرنتیجه‌می‌شود $OB' = R$، چون‌نقطه B' برمحیط دایره (O و R) واقع و ازطرف دیگر بر AM واقع است لذا لازم می‌آید بر B منطبق شود یعنی $O'M \| OB$ است بنابر این راه‌حل مسئله به‌صورت زیر بدست می‌آید:



شکل ۲۵۱ ب

ازمرکزدایره (O و R)، نقطه O عمود OH را بر D فرود می‌آوریم، نقطه برخورد این عمود را بادایره (O و R)، B می‌نامیم، AB را وصل می‌کنیم تا خط D را در نقطه M قطع‌کند از M عمودی بر D اخراج می‌کنم تا امتداد شعاع OA را درنقطه O' قطع‌کند O' مرکز دایره مطلوب و شعاع آن $O'M$ است.

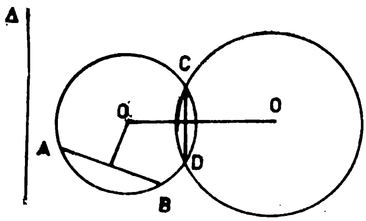
همین روش ترسیم را می‌توان درباره نقطه C عمل کرد و دایره دیگری که آن هم جواب دیگر مسئله است بدست آورد.



شکل ۲۵۱ ج

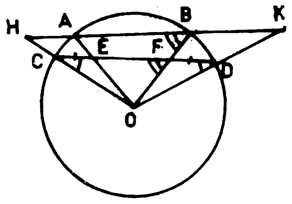
بحث ـ اگر نقطه B یا نقطه C بر نقطه A واقع شوند مسئله تنها یك جواب دارد (ش ۲۵۱ ج) (نقطه A بنا به‌فرض روی خط D نمی‌باشد).

۲۵۲ ـ مرکز دایره مطلوب از طرفی روی عمود منصف AB است و ازطرف‌دیگر روی عمودی‌است که از O بر امتداد Δ فرودمی‌آید پس در محل برخورد آنها نقطه O′ واقع است. و دایرهٔ مطلوب O′AB جواب مسئله است. شرط امکان مسئله این‌است که عمودهای مذکورمتقاطع شوند و دایرهٔ O′ دایره O را قطع کند. (ش ۲۵۲)



شکل ۲۵۲

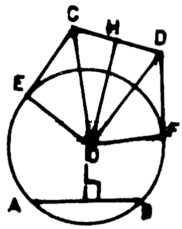
۲۵۳ ـ CD را وتر مطلوب فرض می‌کنیم بطوریکه CE = EF = FD باشد. در مثلث متساوی‌الساقین OCD زاویه‌های‌دوطرف‌قاعده یعنی $\hat{C}$ و $\hat{D}$ برابرندپس‌دومثلث ODF و OCE بنابر تساوی دوضلع و زاویه بین آنها متساوی می‌باشند وازآنجا نتیجه می‌شود OE = OF



شکل ۲۵۳

یعنی مثلث OFE متساوی‌الساقین است. دومثلث متساوی‌الساقین OEF و OAB در زاویهٔ رأس مشترك‌اند زاویه‌های دوطرف قاعده آنها برابر یکدیگرند یعنی $\hat{F} = \hat{B}$ و بنابراین خط EF با AB موازی است لذا خطهای متقارب OC و OA و OB و OD روی دومتوازی CD و AB قطعه خطهای‌متناسب‌پدید می‌آورند. یعنی‌داریم AH = AB = BK و بنابراین وتر AB را ازدوطرف به‌طول‌های AH و BK مساوی با AB امتداد می‌دهیم. قطعه خطهای OH و OK دایره را در نقطه‌های C و D قطع می‌کنند و CD جواب مسئله است. (ش ۲۵۳)

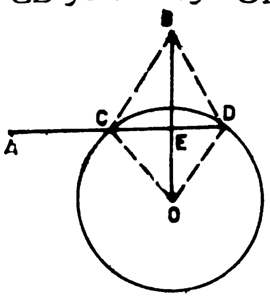
۲۵۴ ـ اگر فرض کنیم که مسئله حل شده باشد باید DF = CE باشد پس دو مثلث قائم‌الزاویه DFO و CEO با هم برابر می‌شوند وازآنجا نتیجه می‌شود که DO = CO بنابراین راه‌حل مسئله چنین است که مرکز دایرهٔ مطلوب محل برخورد عمود منصف AB



شکل ۲۵۴

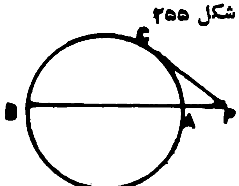
با عمودمنصف CD می‌باشد. (ش ۲۵۴)

۲۵۵ــ اگر مسئله حل شده باشد وتر ACD را جواب مسئله فرض می‌کنیم چون به‌فرض $BC=BD$ و از طرفی $OC=OD$ پس خط OB عمود منصف وتر CD است و برعکس هر وتر ACD که برخط OB عمود باشد آنرا در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند بطوریکه $CE=ED$ و $BC=BD$ بنابراین برای حل‌مسئله‌کافیست خط OB را وصل کرده از A عمودی بر OB فرود می‌آوریم. شرط امکان مسئله آن است که این عمود دایره را قطع کند. (ش ۲۵۵)



شکل ۲۵۵

۲۵۶ــ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای بر امتداد AB باشد بطوریکه داشته باشیم $PC=۲PA$ اما: $\overline{PC}^۲=PA\times PB$ و این رابطه را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۲۵۶

$$۴\overline{PA}^۲=PA\times PB$$

بنابراین:

$$۴PA=PB=PA+AB$$

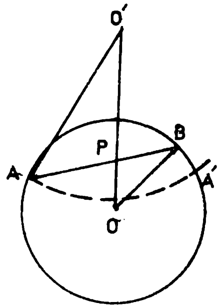
پس:

$$PA=\frac{AB}{۳}$$

بنابراین P بر امتداد AB و درنقطه‌ای واقع است که فاصله‌اش از A مساوی‌یک‌سوم قطر دایره باشد. (ش ۲۵۶)

۲۵۷- فرض کنیم APB وتر مطلوب، بطوریکه $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ باشد حال OB و OP را رسم کرده از A خطی موازی با OB رسم میکنیم تا OP را در O' قطع کند از تشابه مثلثهای POB و $PO'A$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PO'}{PO}=\frac{O'A}{OB}$$



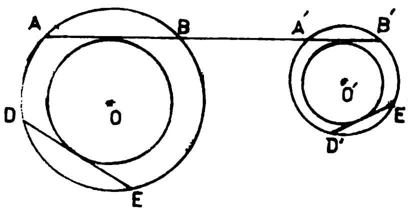
شکل ۲۵۷

و اگر r شعاع دایره باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{m}{n}=\frac{PO'}{PO} \text{ و } \frac{m}{n}=\frac{PO'}{PO}=\frac{O'A}{r}$$

از این تناسب‌ها معلوم می‌شود که PO' جزء مجهول $\frac{m}{n}=\frac{PO'}{PO}$ تناسب مابین m و n و PO می‌باشد و $O'A$ جزء مجهول تناسب مابین n و m و r است پس از ترسیم این قطعه خطها و تعیین O'، به‌مرکز O' و به‌شعاع $O'A$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض را در A و A' قطع کند هر یك از خطهای PA و PA' جواب مسئله‌است (ش۲۵۷) برحسب آنکه دایره به‌مرکز O' وشعاع $O'A$ دایره (O) را در دونقطه قطع کند ویا بر آن مماس باشد و یا قطع نکند، مسئله ممکن‌است دارای دو یا یك‌جواب باشد یا جواب نداشته باشد.

۲۵۸- دردایره O وتر DE را بطول L و در دایرهٔ O' وتر $D'E'$ را بطول L' رسم می‌کنیم. دو دایره به مرکزهای O و O' بر DE و $D'E'$ مماس‌می‌کنیم‌مماس‌مشترك این دودایره خط $ABA'B'$ جواب‌مسئله‌است. (ش۲۵۸)



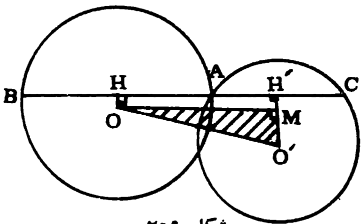
شکل ۲۵۸

اگر شعاع دایره‌های مفروض‌را R و R' بنامیم مسئله وقتی جواب داردکه $L\leqslant ۲R$ و $L'\leqslant ۲R'$ باشد.

۲۵۹- فرض می‌کنیم که ABC قاطع مطلوب باشد ازنقطه O خط OM را موازی با BAC رسم می‌کنیم.

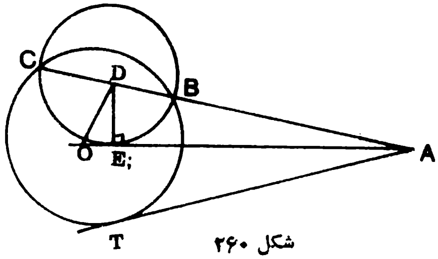
$$AH=\frac{AB}{۲} \text{ و } AH'=\frac{AC}{۲}$$

$$AH+AH'=HH'=OM=\frac{BC}{۲}=\frac{L}{۲}$$



شکل ۲۵۹

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه $OO'M$ را باضلع $\frac{L}{۲}$ و OO' خط‌المرکزین (وتر) می‌توان رسم کرد و از A عمودی بر $O'M$ فرود آورد تا دایرهٔ O را در B و دایره O' را در C قطع کند. BC وتر مطلوب است. (ش ۲۵۹)



شکل ۲۶۰

۲۶۰ــ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم نقطه D که وسط BC است‌همان مرکز دایره به‌قطر BC می‌باشد هرگاه E نقطه تماس‌دایره‌مزبور با OA باشد از A مماس AT را بر دایره (O) رسم‌کنیم داریم:

$$AE^۲ = AB \times AC$$

و

$$AT^۲ = AB \times AC$$

پس

$$AE = AT$$

از اینجا معلوم می‌شود که نقطه E بدین‌طریق بدست می‌آید که بر AO طول $AE = AT$ را جدا کنیم و نقطهٔ E داخل دایره و روی قطعه خط AO خواهد بود زیرا $AT < AO$ است. برای تعیین نقطهٔ D مرکز دایره مطلوب، از E عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تا دایره به‌قطر OA را در نقطهٔ D قطع‌کند (ش ۲۶۰) و چون همواره این خط و این دایره یکدیگر را قطع می‌کنند پس مسئله دارای دوجواب است.

۲۶۱ــ فرض مــی‌کنیم مسئله حــل شده و AB خط مطلوب بــاشد پس رابطه (۱) $\frac{MA}{AB} = \frac{m}{n}$ برقرار است $\left[A\right.$ مجانس B است‌در تجانس $\left(M \; , \; \frac{m}{n}\right)\left.\right]$ مجانس E درهمان تجانس‌را C می‌نامیم پس (۲) $\frac{MC}{ME} = \frac{m}{n}$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{ME}$$

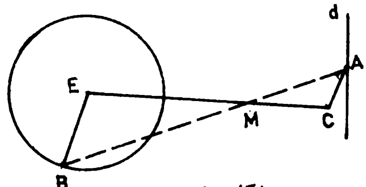
این رابطه نشان می‌دهدکه AC موازی EB است و داریم:

$$\frac{AC}{EB}=\frac{m}{n}$$

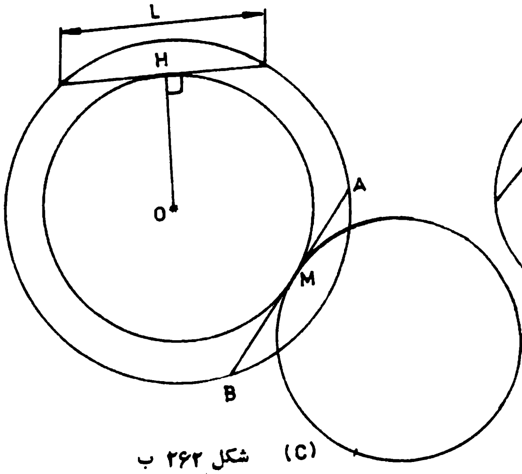
و یا

$$AC=R\cdot\frac{m}{n}$$

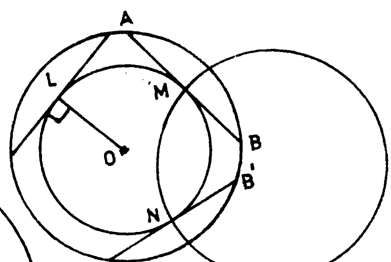
پس راه‌حل مسئله بدین‌ترتیب بدست می‌آیدکه مجانس E را در تجانس $\left(M \text{ و } \frac{m}{n}\right)$ پیدا کرده تا نقطه C بدست آید سپس به‌مرکز C و با شعاع $R\cdot\frac{m}{n}$ دایره‌ای رسم مـی‌کنیم [این دایره مجانس دایره (R و E) است] تا خط d را در نقطه A قطـع کند. از نقطه E خطی بموازات AC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه B قطع‌کند AB جواب مسئله است. (ش ۲۶۱) اگر مجانس دایره (R و E) یعنی دایره $\left(C \text{ و } R\cdot\frac{m}{n}\right)$ خط d را در دونقطه قطـع کند مسئله دارای دوجواب است و اگر بر d مماس شود مسئله دارای یك جواب است و اگر قطع نکند مسئله دارای جواب نیست.



شکل ۲۶۱



شکل ۲۶۲ ب



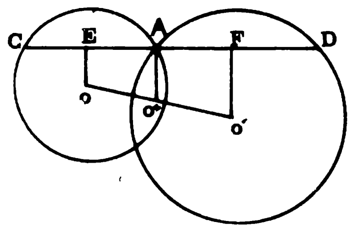
شکل ۲۶۲ الف

۲۶۲ــ دایرهٔ O مفروض است می‌خواهیم وتری رسم کنیم بطول L کـه وسط آن روی دایرهٔ (C) باشد در دایرهٔ O وتری به‌طول L رسم می‌کنیم و از O عمود OH را

رسم کرده دایره به‌شعاع OH رسم می‌کنیم هر مماس که بر دایره اخیر رسم شود و داخل دایره O باشد طولش L خواهد بود. در هر نقطه کــه دایره به‌شعاع OH دایره (C) را قطع کند جواب مسئله است. (ش ۲۶۴)

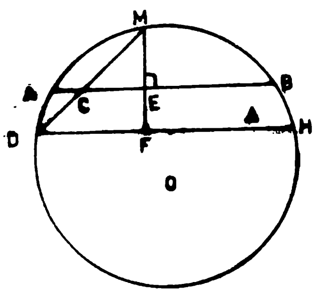
ممکن است مسئله دوجواب و یا یك جواب (درحالت مماس) یا جواب نداشته باشد.

۲۶۳ــ فرض مــی‌کنیم CAD جــواب مسئله باشد از O و O' عمودهای OE و $O'F$ را بر آن فرود می‌آوریم AF برابر AE است. از A عمودی برقاطع اخراج می‌کنیم تا OO' را در O'' قطع کند. در ذوزنقه $OEFO'$ نقطه O'' وسط OO' مــی‌باشد. بنا بر این راه‌حــل مسئله چنین است. O'' وسط OO' را به‌نقطه A وصل می‌کنیم و سپس قاطع ACD را بر AO'' عمودکنیم. (ش ۲۶۳)



شکل ۲۶۳

۲۶۴ــ بــاید نقطه C وسط MD باشد. پس $\frac{MC}{MD}=\frac{۱}{۲}$ بنا بر این از نقطه M خطی بر AB عمود کرده و ME را به‌اندازه‌خود تا نقطه F امتداد می‌دهیم از F خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا این وتر، محیط دایره را در نقطه‌های D و H قطع کند چون E وسط MF است لذا $\frac{EM}{FM}=\frac{۱}{۲}$ و بنا بر این

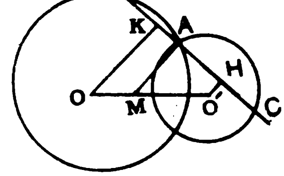


شکل ۲۶۴

$$\frac{CM}{DM}=\frac{EM}{FM}=\frac{۱}{۲}$$

است. (ش ۲۶۴)

۲۶۵ــ نقطه M را بــر روی خط‌المرکزین چنان اختیار می‌کنیم که: $\frac{MO}{MO'}=\frac{p}{q}$ باشد. نقطه A را به M وصل کرده و از A قاطع BC را بر AM عمود می‌کنیم، این‌خط جواب مسئله است. زیرا اگر از O و O' عمودهای OK

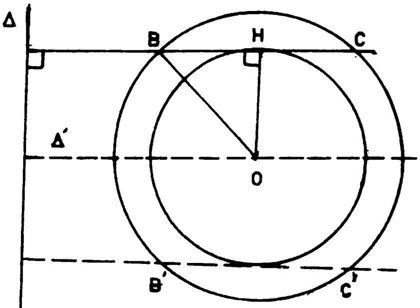


شکل ۲۶۵

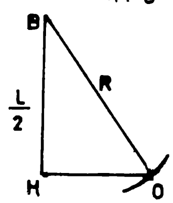
و O'H را بر BC فرود آوریم می‌دانیم K و H وسطهای AB و AC می‌باشند، داریم: (ش ۲۶۵)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{p}{q} \text{ و یا } \frac{AK}{AH}=\frac{OM}{MO'}=\frac{p}{q}$$

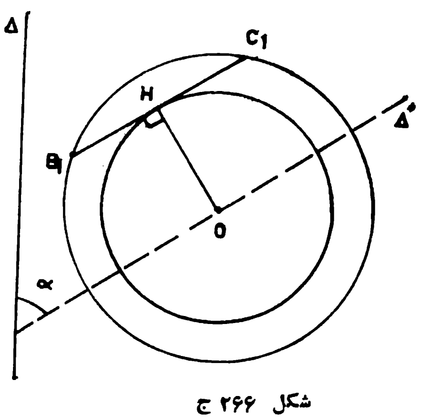
۲۶۶ــ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و وتر BC جواب مسئله باشد بنابراین $BC=l$ و عمود بر امتداد Δ می‌باشد. از مرکز دایره عمود OH را بر BC فرود می‌آوریم در مثلث قائم‌الزاویه OHB وتر و یك ضلع معلوم است لذا می‌توان OH را بدست آورد. دایره به‌مرکز O وشعاع OH در نقطه H بر وتر BC مماس است بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید: ابتداء پاره‌خط OH را با ترسیم مثلث قائم‌الزاویه OHB بدست‌آورده و دایـره‌ای بـه مرکز O و شعاع OH رسم می‌کنیم و از مرکز این دایره خطی موازی Δ رسم کرده تا دایره را در نقطه H قطع کند. مماس رسم شده در نقطه H بر دایـره (OH و O) دایره‌مفروض (R و O) را در دونقطه B و C قطع می‌کند وتر BC جـواب مسئله است (ش ۲۶۶ الف) شرط امکـان مسئله آن است که مثلث قائم‌الزاویه OHB قابل‌ترسیم باشد لذا باید $R>\frac{l}{2}$ بـاشد. مسئله همواره دارای دوجواب است کـه دو وتر موازی و مساوی BC و B'C' می‌باشدترسیم‌وترمطلوب درحالت دوم مانند حالت اول است ولی باید در این حالت بـه‌جای آنکه از مـرکز دایره موازی Δ خطی رسم شود، خط Δ'' چنان رسم گرددکه با Δ زاویه α را تشکیل دهـد. (ش ۲۶۶ ج).



شکل ۲۶۶ الف

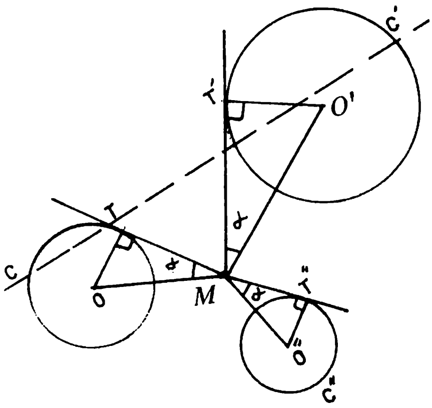


شکل ۲۶۶ ب



شکل ۲۶۶ ج

۲۶۷ــ اگر مسئله حل شده و M نقطه مطلوب باشد، از مثلثهای متشابه MTO و MT'O' نتیجه می‌شود:



شکل ۲۶۷

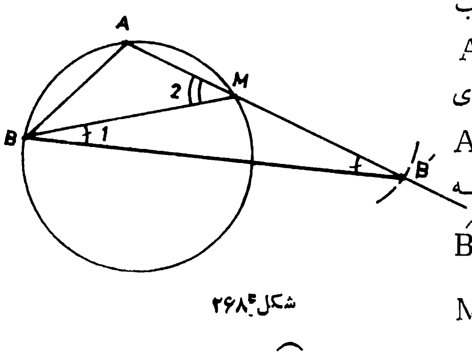
$$\frac{MO}{MO'}=\frac{R}{R'}=K$$

نقطه M برمکان هندسی نقطه‌هایی واقع است که نسبت فاصله‌های آنها از دونقطه ثابت O و O' برابر با K باشد. همچنین از تشابه مثلث‌های MTO و $MT''O''$ نتیجه می‌شود.

$$\frac{MO}{MO''}=\frac{R}{R''}=K'$$

نقطه M بر مکان هندسی نقطه‌هایی واقع‌است که نسبت فاصله‌های آنها از دونقطه ثابت O و O'' برابر با K' باشد لذا M بر محل تقاطع این دومکان هندسی واقع است. بنابراین ابتداء برروی خط OO'، دو نقطه P و Q راکه مزدوجهای توافقی O و O' با نسبت K می‌باشند تعیین کرده و به‌قطر PQ دایره‌ای رسم می‌کنیم. (شکل ۲۶۷)

(مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو نقطه ثابت O، O'، نسبت فاصله‌های آنها برابر مقدارمعیین K باشد دایره‌ای است که مرکزش بر OO' واقع بوده و قطر آن بر P و Q مزدوجهای توافقی دونقطه O و O' با نسبت K می‌گذرد) و به همین ترتیب دایره دیگر را برای O و O'' می‌کشیم محل تلاقی دو دایره نقطه مطلوب M است.



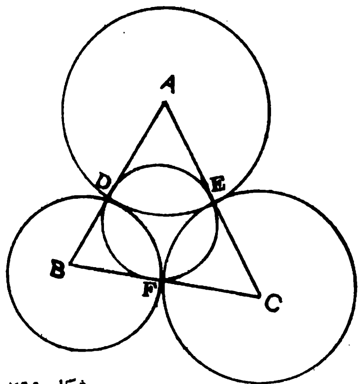
شکل ۲۶۸

۲۶۸ـ اگر مسئله حل شده و M نقطه مطلوب باشد، AM راتانقطه B' بطوریکه $AB'=l$ باشد امتداد می‌دهیم نقطه B' بر دایره‌ای به‌مرکز A وشعاع l واقع است، از $AB'=l$ و $MA+MB=l$ نتیجه می‌شود که $MB=MB'$ است لذا دوزاویه $\hat{B}_1=\hat{B}'$ و زاویه $\widehat{AMB}$ زاویه خارجی مثلث $M\overset{\Delta}{B}B'$ است و $\hat{M}_2=2\hat{B}'$ می‌شود یعنی اندازه زاویه B' برابر $\frac{\widehat{AB}}{4}$ است. بنابراین‌نقطه B' بر محیط دایره شامل‌کمان درخور زاویه $\hat{B}'=\frac{\widehat{AB}}{4}$ نظیر به وتر AB واقع است.

راه ترسیم: به مرکز نقطه A و شعاع l کمانی رسم کرده و کمان درخور زاویه

$\frac{\widehat{AB}}{۴} = B'$ را نظیر به‌وتر AB رسم می‌کنیم محل تلاقی دایره (l و A) با این کمان درخور نقطه B' می‌باشد، نقطه B' را به A وصل می‌کنیم تا از تلاقی آن با دایره نقطه M بدست آید. (ش ۲۶۸)

شرط امکان مسئله آن است که دایره (l و A) با دایره شامل کمان درخور زاویه B' نظیر به‌وتر AB متقاطع یا مماس باشد.



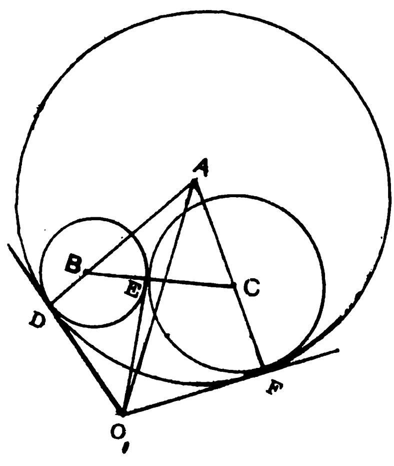
شکل ۲۶۹ الف

۲۶۹ــ اگر مسئله حل شده باشد باید $AD = AE$ و $BD = BF$ و $CE = CF$ باشد. اگر دایره محاطی داخلی مثلث ABC را درنظر گیریم چون طول مماسهای رسم شده از یك نقطه بر دایره با یکدیگر برابر اند نتیجه می‌شود که نقطه‌های D و E و F همان نقطه‌های تماس ضلعهای مثلث با دایره محاطی داخلی آن است و لذا راه‌حل زیر بدست می‌آید.

رسم دایره ــ با رسم دونیمساز داخلی دو زاویه مثلث ABC نقطه تلاقی آنها، یعنی مرکز دایره محاطی داخلی مثلث تعیین شده و با تعیین فاصله این نقطه تا سه ضلع مثلث نقطه‌های E و D و F بدست می‌آیند. سه‌دایره به‌مرکزهای A و B و C و شعاعهای AD و BD و CF جواب مسئله‌اند درحالت دوم از O_1 که مرکز دایره محاطی خارجی ضلع $BC = a$ است عمودهای O_1E و O_1F و O_1D را برضلعهای BC و AC و AB فرود می‌آوریم دایره به مرکز O_1 و شعاع O_1F در نقطه‌های F و E و D بر ضلعهای مثلث (بر ضلع BC و امتدادهای AC و AB) مماس است و بنابراین:

$$BE = BD \text{ و } CF = CE \text{ و } AF = AD$$

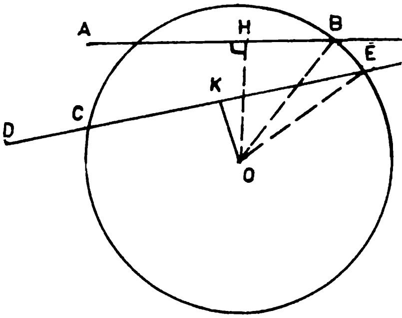
ومی‌باشد دایره‌های به مرکز A و شعاع AF و به مرکز B و شعاع BD و به مرکز C و شعاع CF جوابهای مسئله‌اند.



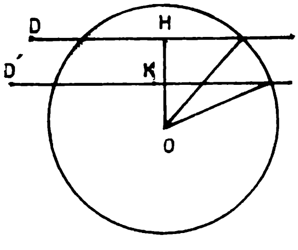
شکل ۲۶۹ ب

به‌همین ترتیب می‌توان از دایره محاطی خارجی ضلع $AC = b$ و دایره محاطی خارجی ضلع $AB = c$ استفاده کرده و دوجواب دیگر بدست آورد.

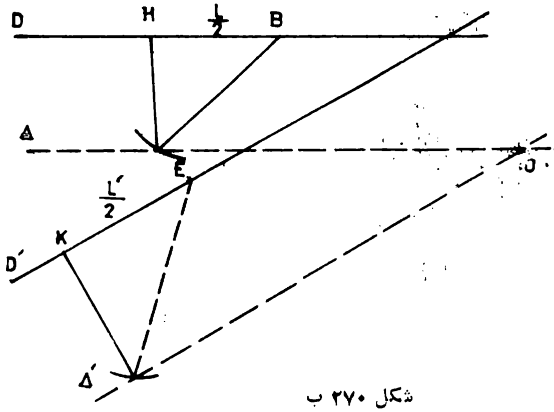
۲۷۰- اگر مسئله حل‌شده فرض‌شود $AB = l$ و $CE = l'$ باشد مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و OKE را با معلوم بودن وتر (شعاع دایره) و یك ضلع $\left(HB=\frac{l}{2}\right)$ و $\left(KE=\frac{l'}{2}\right)$ می‌توان رسم کرد و در نتیجه فاصله‌های OH و OK بدست‌می‌آید. بنابراین: دوخط موازی با D و با D' را بترتیب بفاصله‌های OH و OK برسم می‌کنیم محل تلاقی آنها مرکز دایره مطلوب می‌باشد. (ش ۲۷۰)



شکل ۲۷۰ الف



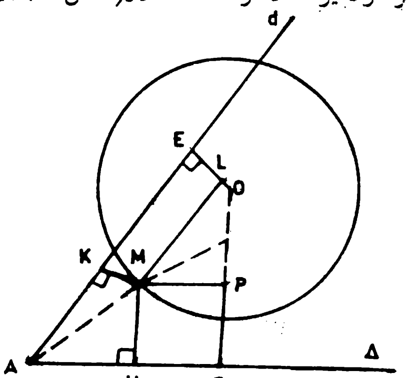
شکل ۲۷۰ ج



شکل ۲۷۰ ب

شرط امکان مسئله آن است‌که l و l' از قطر دایره مطلوب کوچکتر ویا حداکثر وتر بزرگتر، مساوی قطر دایره باشد $2R \geqslant l'$ و $2R > l$ (با فرض $l < l'$).

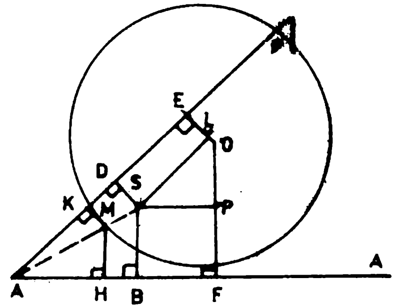
اگر دوخط D و D' موازی باشند تعیین مرکز دایره ساده‌تر است که در (شکل ۲۷۰ج) ملاحظه می‌شود.



شکل ۲۷۱ الف

۲۷۱- اگر مسئله حل شده فرض شود و M نقطه مطلوب باشد $\frac{MH}{MK}=2$ است. اگر از M خطی موازی d رسم کنیم تا OE را $(OE\perp d)$ درنقطه L و همچنین از M خطی موازی Δ رسم کنیم تا OF را $(OF\perp\Delta)$ درنقطه P قطع کند نتیجه می‌شود که $\frac{pF}{LE}=2$

است بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. بر روی OE از نقطه E پاره‌خطی جدا کرده و دوبرابر طول این پاره‌خط را از نقطه F بر روی OF جدا می‌کنیم از نقطه‌های حاصل L و P دوخط به‌ترتیب موازی d و Δ رسم می‌کنیم تا نقطه S بدست آید (S ممکن است داخل یا خارج دایره باشد) نقطه S را به A وصل می‌کنیم تا محیط دایره را در نقطه M قطع کند، M همان نقطه مطلوب است زیرا :



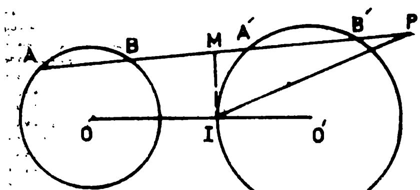
شکل ۲۷۱ ب

$$\frac{MH}{MK}=\frac{SB}{SD}=\frac{PF}{LE}=۲$$

شرط امکان مسئله آن است که AS محیط دایره را قطع‌کند. (ش ۲۷۱)

اگر AS دایره را در دونقطه قطع کند مسئله دوجواب دارد اگر AS بردایره مماس شود مسئله یك‌جواب دارد و اگر AS دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

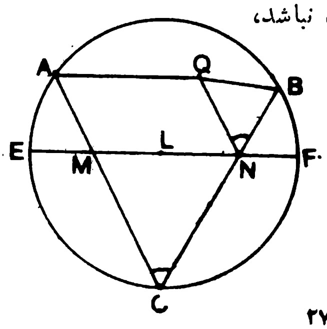
۲۷۲– فرض کنیم $BA=B'A'$ و I وسط OO' باشد تصویر I روی PA نقطه M است پس M وسط $A'B$ و همچنین وسط AB' است بنابراین :



شکل ۲۷۲

$MB \cdot MA=MA' \cdot MB'$ و M روی محور اصلی دو دایرهٔ O و O' همچنین روی محیط دایره به‌قطر IP است. درنتیجه درمحل تقاطع آنها واقع است. با تعیین M، قاطع مطلوب‌رسم می‌شود. (شکل۲۷۳) مسئله‌ممکن است دوجواب یا یك جواب داشته و یا دارای جواب نباشد،

۲۷۳ فرض کنیم CA و CB از قطر EF قطعه خط MN را به‌طول L جداکنند. واضح است‌که مقدار زاویه C معلوم‌است زیراکمان مقابل‌آن $\widehat{AB}$ مفروض‌است، از A قطعه خط AQ را همسنگ MN رسم می‌کنیم شکل AMNQ متوازی‌الاضلاع است و

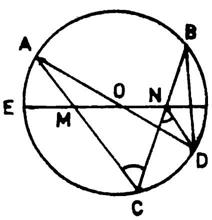


شکل ۲۷۳

$\widehat{QNB}=\hat{C}$. بنابراین راه‌حل مسئله چنین است. از A خطی بموازات EF رسم‌کرده روی

آن AQ را برابر L جدا می‌کنیم. نقطه B را به Q وصل می‌کنیم و روی BQ کمان درخور زاویه $\hat{C}$ را می‌سازیم تا در نقطه N قطر EF را قطع کند. BN دایره را در C قطع می‌کند. CA و CB خطهای مطلوبند. (ش ۲۷۳)

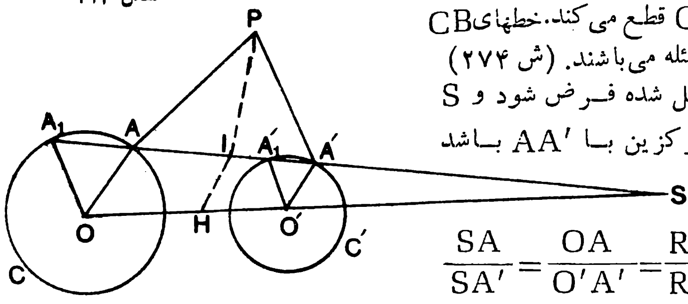
۲۷۴ـ فرض کنیم مسئله حل شده باشد و CA و CB جواب مسئله باشند و $OM=ON$ باشد مقدار زاویهٔ $\hat{C}$ معلوم است زیرا کمان $\widehat{AB}$ مفروض است. AO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند N را به D وصل می‌کنیم دو مثلث OAM و OND با هم برابرند پس ND با AC موازی است و $D\hat{N}C=\hat{C}$ و $\widehat{DNB}$ مکمل $\hat{C}$ می‌باشد. بنا بر این راه‌حل مسئله چنین است: A را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند، روی BD کمان درخور مکمل زاویهٔ C را می‌سازیم که قطر EF را در N قطع می‌کند. خط BN دایره را در C قطع می‌کند. خطهای CB و CA جوابهای مسئله می‌باشند. (ش ۲۷۴)



شکل ۲۷۴

۲۷۵ـ اگر مسئله حل شده فرض شود و S نقطه تلاقی خط‌المرکزین با AA' باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{R}{R'}$$



شکل ۲۷۵ الف

از این تساوی نتیجه می‌شود که S نقطه ثابتی است که همان مرکز تجانس دو دایره است، اگر I وسط AA' باشد برای آنکه $PA=PA'$ باشد لازم و کافی است که PI بر AA' عمود باشد. اگر I را به H وسط OO' وصل کنیم HI با OA و $O'A'$ موازی بوده و در حالتی که OA و $O'A'$ هم‌جهت باشند[1] داریم:

۱ـ اگر دو شعاع متوازی ولی هم‌جهت نباشند نقطه S' مرکز تجانس معکوس دو دایره و $\overset{*}{IH}=\frac{OA-O'A'}{2}$ است و همان استدلال و روش ترسیم تکرار می‌شود.

*ـ با جدا کردن شعاع $O'A'$ برروی شعاع OA ورسم خطی موازی با AA'، HI بدست می‌آید.

$$IH=\frac{OA+O'A'}{۲}=\frac{R+R'}{۲}$$

بنابراین I از یك‌طرف بردایره‌ای به‌قطر PS و از طرف دیگر بر دایره‌ای به مرکز H و شعاع $\frac{R+R'}{۲}$ واقع است. ولذا بر محل تقاطع دو دایره قراردارد. بنابراین راه‌ترسیم چنین‌است:

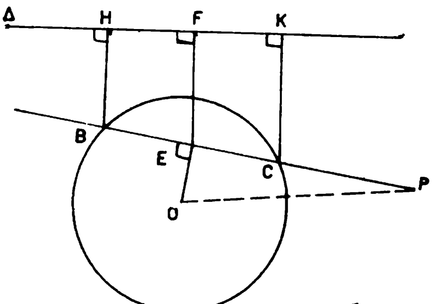
دو شعاع متوازی و هم‌جهت از دو دایره C و C′ را رسم کرده و انتهای دو شعاع را به‌هم وصل می‌کنیم تا خط OO′ را درنقطه ثابت S قطع کند. به قطر پاره‌خط PS دایره‌ای رسم می‌کنیم. به‌مرکز H وسط OO′ و شعاع $\frac{R+R'}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم محل برخورد این دایره با دایره به‌قطر PS نقطه I می‌باشد PI را وصل‌کرده و از نقطه I عمودی بر آن اخراج می‌کنیم تا محیط دو دایره را در A و A′ قطع‌کند شعاعهای متوازی OA و O′A′ جواب مسئله‌اند[۱].

شرط امکان مسئله‌آن است‌که دایره به‌قطر PS با دایره (H و HI) متقاطع یا مماس باشد.

اگر دو دایره یکدیگر را دو دونقطه I و I′ قطع‌کند مسئله دو دسته جواب دارد.

اگر دو دایره برهم مماس باشند مسئله یك جواب دارد.

اگر دو دایره نقطه مشترکی نداشته باشند مسئله جواب ندارد.

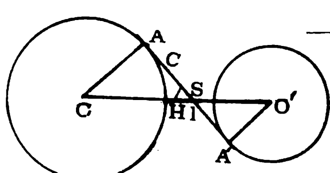


شکل ۲۷۶ الف

۲۷۶ـ مسئله‌را حل‌شده‌فرض کرده‌دراینصورت BH+CK=l است. نقطه E وسط BC را به F وسط HK وصل می‌کنیم چهارضلعی BCKH ذوزنقه است و داریم

$$EF=\frac{CK+BH}{۲}=\frac{l}{۲}$$

نقطه E روی دایره به‌قطر PO، وازطرف‌دیگر روی خطی است‌که فاصله آن از Δ مساوی با

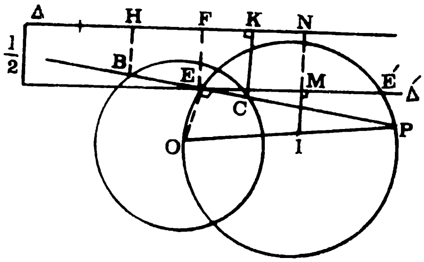


شکل ۲۷۵ ب

۱ـ توجه‌شودکه نقطه‌های $A_۱'$ و $A_۱$ نمی‌توانند دسته جواب دیگر مسئله باشند زیرا از نقطه P فقط یك عمود بر امتداد $A_۱AA_۱'A'$ می‌توان فرود آورد.

$\frac{1}{۲}$ است واقع می‌باشد. (ش ۲۷۶) بنابراین راه ترسیم زیر برای مسئله بدست می‌آید.

از نقطه دلخواه واقع بر Δ عمودی بر آن اخراج کرده و در روی آن از این نقطه طول $\frac{1}{۲}$ را نقل می‌کنیم و خطی به‌موازت Δ می‌کشیم و به‌مرکز I وسط پاره‌خط PO و شعاع $\frac{PO}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم نقطه تلاقی خط مذکور و این دایره نقطه E می‌باشد. با تعیین نقطه E خط PE را رسم کرده تا نقطه‌های تلاقی آن با دایره مفروض (O)، مشخص شود، وتر BC بدست می‌آید. (ش ۲۷۶)



شکل ۲۷۶ ب

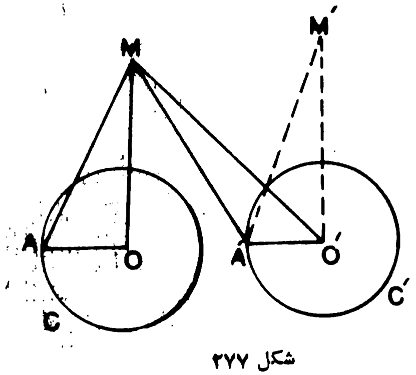
شرط امکان مسئله آن‌است‌که دایره $\left(I, \frac{PO}{۲}\right)$ خط Δ' را قطع کند و یا بر آن مماس باشد. اگر فاصله مرکز دایره $\left(I, \frac{OP}{۲}\right)$ از خط Δ را d بگیریم$(IN=d)$، IM فاصله مرکز دایره $\left(I, \frac{PO}{۲}\right)$ از خط Δ' برابر با $IM=d-\frac{1}{۲}$ و بنابراین شرط وجود جواب مسئله آن است‌که:

$$d-\frac{1}{۲}\leqslant PI=R \Longrightarrow d\leqslant \frac{1}{۲}+R$$

یعنی باید فاصله نقطه I (وسط PO) از خط مفروض Δ کوچکتر یا مساوی با مجموع نصف طول معیین داده شده و نصف فاصله نقطه مفروض P از مرکز دایره مفروض باشد.

اگر $d\leqslant \frac{1}{۲}+R$ باشد خط Δ' در دونقطه دایره $\left(I, \frac{PO}{۲}\right)$ را قطع‌می‌کند ولی مسئله وقتی دوجواب دارد که قاطع PE' نیز دایره مفروض (O) را قطع کند و چنانکه در شکل ۲۷۶ ملاحظه می‌شود قاطع PE' دایره (O) راقطع نمی‌کند لذا مسئله فقط یك‌جواب دارد.

۲۷۷ــ اگر مسئله حل شده باشد و دوشعاع OA و $O'A'$ شعاعهای خواسته شده باشند، اگر از نقطه O' خطی موازی OM و از نقطه A' خطی موازی AM رسم کنیم تا یکدیگر را درنقطه M' قطع کنند دومثلث AOM و $A'O'M'$ نظر به‌توازی‌ضلعهایشان



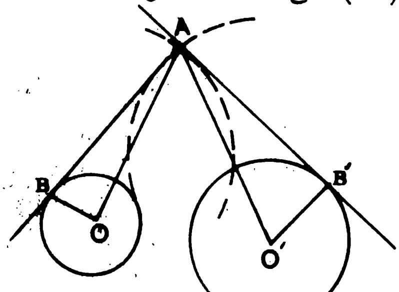
شکل ۲۷۷

بایکدیگر، متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

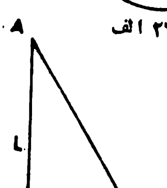
$$\widehat{AMO}=\widehat{A'MO'}=\widehat{A'M'O'}$$

در نتیجه دایـره محیطی مثلث $M'A'O'$ از نقطه M می‌گذرد. از تشابه دو مثلث مـذکور نتیجه می‌شود: $\frac{M'O'}{MO}=\frac{R'}{R}$ بنابراین راه ترسیم زیر بدست می‌آید. از نقطه O' مرکز دایره (C') خطی مـوازی امتداد معلوم OM رسم کرده و از روی آن طـول $O'M'$ را جـدا می‌کنیم ($O'M'$ یك جـزء از تناسب $\frac{M'O'}{MO}=\frac{R'}{R}$ است‌که چون سه جزء تناسب معلوم‌می‌باشداین‌جزء بدست‌می‌آید) دایره‌ای که از سه نقطه M' و O' و M مـی‌گذرد دایره (C') را در نقطه A' قطع‌می‌کند $A'O'$ را رسم‌کرده و از O خطی موازی با $O'A'$ رسم مـی‌کنیم تا دایره (C) را در نقطه A قطع‌کند. $O'A'$ و OA دوخط موازی مطلوب می‌باشند. (ش ۲۷۷)

شرط امکان مسئله آن است‌که دایره گذرنده بر $MO'M'$ دایره (C') را قطع کند که چون دایره $MO'M'$ بر O' مرکز دایره (C') مـی‌گذرد لذا همواره آن را در دو نقطه قطع می‌کند و مسئله دوجواب دارد.



شکل ۲۷۸ الف



شکل ۲۷۸ ب

۲۷۸ـ فرض می‌کنیم مسئله حل‌شده و A نقطه مطلوب بـاشد پس $AB=AB'=l$ خـواهد بود. اگـر نقطه A را بـه نقطه‌های O و O' (مرکزهای دو دایره) و ایـن دو مرکز را به نقطه‌های B و B' (نقطه‌های تماس) وصل کنیم مثلث‌هـای قائم‌الزاویـه ABO و $A\ B'O'$ هریك با در دست بـودن دوضلع قابل ترسیم می‌باشند و در نتیجه وتـرهای AO و $A\ O'$ بدست می‌آیند بنابراین:

ابتداء طول‌های OA و $O'A$ را با ترسیم مثلثهای قائم‌الزاویه ABO و $A\ O'B'$ (هر مثلث بـا داشتن دوضلع) را بـدست آورده و

به‌مرکزهای O و O' و شعاعهای OA و $O'A$ دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کنند. نقطه A جواب مسئله است. (ش ۲۷۸)

شرط امکان مسئله آن است که دو دایره (OA و O) و ($O'A$ و O') یکدیگر را قطع و یا برهم مماس باشند.

$$OA-O'A<OO'<OA+O'A$$

دوجواب دارد

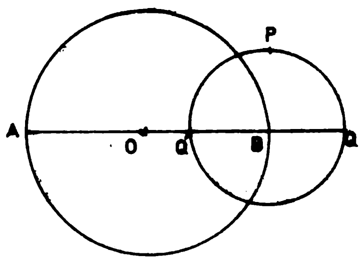
$$OO'=OA+O'A$$

یك جواب دارد

$$OO'>OA+O'A$$

جواب ندارد.

۲۷۹ـ یکی‌از نقطه‌ها مثلا Q را به‌O، مرکز دایره‌وصل‌می‌کنیم خطOQدایره رادر نقطه‌های A وB قطع‌می‌کند. مزدوج توافقیQ رانسبت به A و B پیدا می‌کنیم، که نقطه Q' است. دایره‌ای‌که ازP وQ وQ' می‌گذرد، بردایرهٔ (O) عمود است زیرا قطر دایره(O) به‌وسیله دایرهٔ مزبور به‌توافق تقسیم‌می‌شود. (ش ۲۷۹)

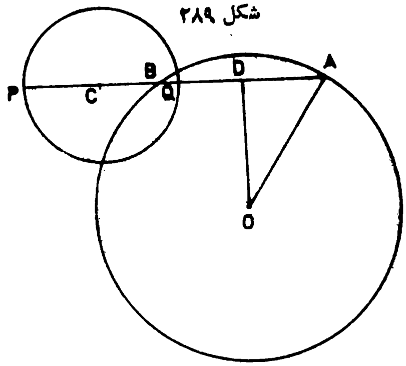


شکل ۲۷۹

۲۸۰ـ دایرهٔ C و نقطه‌Aرا درنظرمی‌گیریم. A را به C مرکز دایره وصل می‌کنیم. تاقطر PQ از دایـره رسم شود. نقطـهٔ B را روی PQ چنان اختیار می‌کنیم که داشته باشیم:

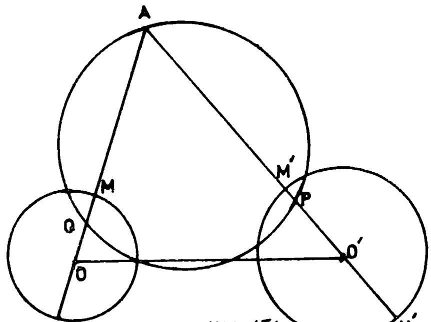
$$\frac{BQ}{BP}=\frac{AQ}{AP}$$

دایره‌ای‌که از A و B مـی‌گذرد بر دایره C عمود خواهد بود. (ش ۲۸۰)



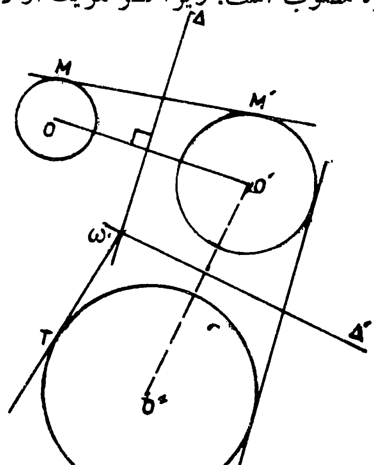
شکل ۲۸۰

بنابراین عمودمنصف AB را رسم کرده وبه‌مرکز A و شعاع R کمانی رسم‌می‌کنیم که عمود منصف‌را در O قطع‌کند. دایره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاع OA جواب‌مسئله است. مسئله ممکن است دوجواب و یا یك جواب داشته باشد و یا دارای جواب نباشد.



شکل ۲۸۱

۲۸۱ـ نقطه مفروض A را به نقطه‌های O و O' مرکزهای دو دایره وصل می‌کنیم تا آنها را در M و N و M' و N' قطع‌کنند. اگر P مزدوج توافقی A نسبت به M' و N' ونقطهٔ Q مزدوج توافقی A نسبت به M و N باشد، دایره مطلوب باید از A و P و Q بگذرد تا بر هر دو دایرهٔ (Q) و (O') عمود شود. بنابراین AO و AO' را رسم می‌کنیم تا نقطه‌های M و N بر دایره (O) و نقطه‌های N' و M' بر دایره (O') بدست می‌آید. مزدوج توافقی A را نسبت به N و M ، همچنین مزدوج توافقی همین نقطه را نسبت به N' و M' تعیین می‌کنیم. نقطه‌های P و Q بدست می‌آیند. دایره‌ای که بر سه نقطه P و Q و A می‌گذرد دایره مطلوب است. زیرا قطر هریك از دو دایرهٔ (O) و (O') بوسیله دایره رسم شده به‌توافق تقسیم می‌شود (ش ۲۸۱)

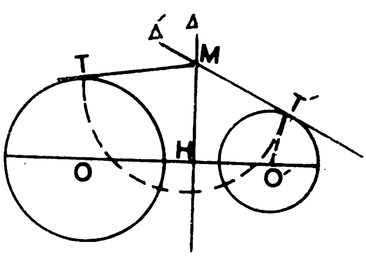


شکل ۲۸۲

۲۸۲ـ مرکز اصلی سه دایره مفروض مرکز دایره‌ای است که عمود بر سه دایره است و شعاع آن مماس مرسوم از این نقطه بر هریك از دو دایره می‌باشد. زیرا قوت مرکزش نسبت به دایره‌های مفروض برابر با مجذور شعاع خود می‌باشد.

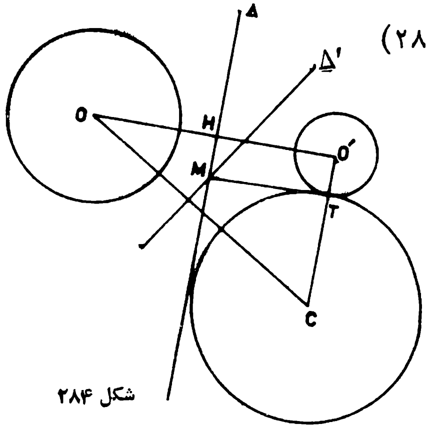
دایره به‌مرکز ω (مرکز اصلی سه‌دایره وشعاع ωT شعاع دایره مطلوب است) (ش ۲۸۲)

۲۸۳ـ دسته دایره‌های $(\Delta$ و $O)$ و خط Δ' داده شده است. محل برخورد Δ' را با Δ نقطهٔ M می‌نامیم. از M مماس MT را به دایره (O) رسم می‌کنیم. به مرکز M و شعاع MT دایره‌ای می‌کشیم که Δ' را در T' قطع می‌کند. از T' عمودی بر Δ' اخراج می‌کنیم تا OH را در O' تلاقی کند. دایره به‌مرکز O' و به شعاع $O'T'$ جواب مسئله است، زیرا اولا متعلق به دایره‌های دستگاه



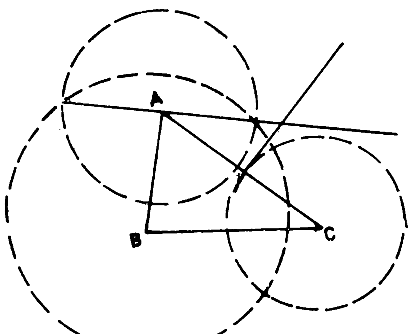
شکل ۲۸۳

است ثانیاً بر خط Δ' مماس می‌باشد. (ش ۲۸۳)



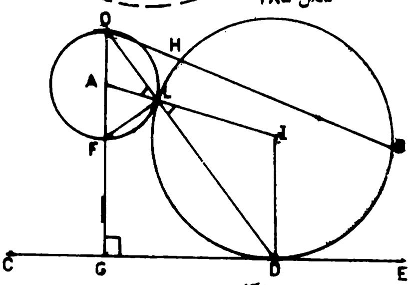
شکل ۲۸۴

۲۸۴ــ دستگاه‌دایره‌های (Δ و O) و دایرهٔ (C) را درنظر می‌گیریم. Δ' محور اصلی دودایره (O) و (C) را رسم می‌کنیم که Δ را در M قطع می‌کند. این نقطه، مرکز اصلی دایرهٔ (C) و دایرهٔ (O) و دایرهٔ مطلوب است بنابراین از M مماس MT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم. محل برخورد CT با OH نقطه O' مرکز دایره مطلوب می‌باشد که شعاعش $O'T$ است. زیرا اولا دایرهٔ (O') متعلق بــه دستگاه دایره‌ها است و ثانیاً با دایرهٔ (C) مماس است. (ش ۲۸۴)



شکل ۲۸۵

۲۸۵ــ سه‌دایره به‌مرکزهای A و B و C رسم می‌کنیم که به‌ترتیب شعاع آنها برابر است با BC و CA و AB. دایره‌ای‌که به سه دایرهٔ فوق عمود شود جواب مسئله‌است. مرکز این دایره مــرکز اصلی سه دایرهٔ مذکور است. (ش ۲۸۵)



شکل ۲۸۶

۲۸۶ــ دایرهٔ (A) و نقطهٔ B و خط CE را درنظر می‌گیریم اگر دایره I: دایــره مطلوب باشد از A خطی بــر CE عمود می‌کنیم که دایــرهٔ مفروض را در O و F و خط مفروض را در G قطع کند. خط AI از نقطهٔ L، نقطه تماس می‌گذرد. چون دومثلث متساوی‌الساقین OAL و LID دارای یك زاویــه مساوی L مــی‌باشند، پس در ایــن دو مثلث دو زاویهٔ $\hat{O}$ و $\hat{D}$ با هم برابرند. از آنجا نتیجه می‌گیریم که ID با OG موازی است و نقطهٔ D، نقطه تماس است. چهارضلعی LFGD محاطی است، زیرا زاویــه‌های L و G قائمه‌اند. و می‌توان نوشت:

$$OF \cdot OG = OL \cdot OD = OH \cdot OB$$

یا:

$$\frac{OB}{OF}=\frac{OG}{OH}$$

از این تناسب طول OH بدست می‌آید. پس مسئله چنین حل می‌شود: که از دونقطه B و H دایره‌ای بگذرانیم که برخط CE مماس شود[1]. (ش ۲۸۶)

مسئله دارای دوجواب است. اگـر OH را روی OB از جهت دیگر اختیار کنیم مسئله دوجواب دیگر خواهد داشت.

1 ــ این مسئله در صفحه‌های قبل این کتاب حل شده است. مسئله ۲۴۶.

فصل هفتم

مسئله‌های حل نشده

I- نمایش هندسی مقدارهای جبری وخط، زاویه، نقطه

۱- طولهای a و b و c داده شده است طولی مساوی $\frac{ab}{c}$ رسم کنید.

۲- طولهای a و b و c و d و e داده شده‌است طولی مساوی $\frac{abc}{de}$ رسم کنید «راهنمایی - از مسئله قبل استفاده کنید».

۳- طولهای a و b داده شده است طولی مساوی $\sqrt{a^۲-b^۲}$ رسم کنید.

۴- طول a داده شده است طول مانند x بیابید که $\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ باشد.

۵- با فرض آنکه a و b دو طول معلوم و داده باشند ریشه‌های معادله $x^۲-ax+b^۲=۰$ را رسم کنید. «راهنمایی - از رابطه‌های بین ضریب‌ها و ریشه‌ها استفاده کنید.»

۶- طول m داده شده است $\sqrt{m}$ را رسم کنید.

۷- طولهای $\sqrt{۱۴}$ و $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۱۲}$ را رسم کنید.

۸- طولهای a و b و c داده شده‌است طول x را از رابطه $x^۲=a^۲+b^۲-۲c^۲$ رسم کنید.

۹ـ طولهای a و b و c داده شده است طول x را از رابطه $x=\frac{a^2-b^2}{2c}$ رسم کنید.

۱۰ـ طولهای a و b و c داده شده‌است طول x را از رابطه $x=\frac{ac}{a-c}$ رسم کنید «$a>c$ می باشد».

۱۱ـ پاره‌خط a داده شده است طول x را از رابطه $x=a^2$ رسم کنید.

۱۲ـ پاره‌خط m که واسطه هندسی بین‌دو پاره‌خط a و b می باشد داده‌شده و پاره‌خط a هم در دست می‌باشد طول b را رسم کنید.

۱۳ـ پاره‌خط a داده شده است طول x را از رابطه $x=\frac{a}{\sqrt{n}}$ رسم کنید (n عدد درست و مثبت است).

۱۴ـ پاره‌خط a داده شده است آن را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه پاره‌خط پدید آمده متناسب با m و n و q باشند (m و n و q عددهای درست و مثبت می‌باشند).

۱۵ـ مجموع دو طول مقدار ثابتی می‌باشد و داده شده است. این دو طول را چنان بیابید که واسطه هندسی آنها بزرگترین مقدار ممکن را اختیار کنید.

۱۶ـ دونقطه A و B و خط Δ داده شده است. بر این خط نقطه‌ای بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از A و B کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۷ـ زاویه xoy و خط D که با oy در S متلاقی است داده شده است. خطی عمود بر D چنان رسم کنید که ox را در M و oy را در N قطع کند به‌قسمی که M و N نسبت به D قرینه یکدیگر باشند «راهنمایی ـ قرینه Sy را نسبت به D رسم کنید».

۱۸ـ خط D و دونقطه A و B داده شده است. بر D نقطه M را چنان تعیین کنید که $AM-BM$ بزرگترین مقدار ممکن را داشته باشد (A و B را در یك طرف خط D بگیرید).

۱۹ـ زاویه xoy و نقطه A داخل آن داده شده است. روی ضلع ox نقطه‌ای بیابید که از نقطه A و ضلع oy به یك فاصله باشد.

۲۰ـ دوخط D و D′ و نقطه A واقع بر D داده شده است. نقطه M را بر D چنان تعیین کنید که از A و D′ به‌یك فاصله باشد «راهنمایی از A عمود D″ را اخراج کنید و...»

۲۱ـ روی‌ضلع BC ازمثلث ABC نقطه M را چنان‌تعیین کنید که‌مجموع فاصله‌های آن از دوضلع AC و AB برابر با طول معلوم l باشد.

۲۲ـ مسئله قبل را درحالتی‌که تفاضل فاصله‌های M از دوضلع برابر با مقدارمعلوم l باشد حل کنید.

۲۳ـ خط D و دونقطه A و B واقع در دوطرف آن داده شده است. از A و B دوخط چنان رسم کنیدکه روی خط D متقاطع بوده و با آن زاویه‌های متساوی تشکیل دهند.

۲۴ـ زاویه xoy دادهٔ شده است دایره‌ای به‌شعاع معلوم R چنان رسم کنید که بر ضلعهای زاویه مماس باشد.

۲۵ـ دوخط متقاطع D و D′ داده شده است دایره‌ای به‌شعاع معلوم R چنان رسم کنیدکه بر دوخط مماس باشد. «مسئله چند جواب دارد؟»

۲۶ـ سه خط دو به دو متقاطع D و D′ و D″ داده شده است دایره‌ای رسم کنیدکه بر این سه خط مماس باشد «مسئله چند جواب دارد؟»

۲۷ـ پاره‌خط مفروضی‌را به‌دوقسمت چنان تقسیم کنیدکه مجموع مربعهای آنها مقدار معیین l^2 باشد.

II- ترسیم مثلث

در مثلث ABC، زاویه‌ها به A و B و C و اندازه ضلعهای روبروی آنها به a و b و c و طـول ارتفاعها به h_a و h_b و h_c و میانه‌ها بـه m_a و m_b و m_c و نیمسازهای داخلی به d_a و d_b و d_c و نیمسازهای خارجی به d'_a و d'_b و d'_c و شعاع دایره محیطی به R و شعاع دایـره محاطی داخلی به r و شعاع‌های دایـره‌های محاطـی خـارجی به r_a و r_b و r_c و محیط به $2P$ نشان داده شده است.

مثلث متساوی‌الساقین ABC را با معلومهای زیر رسم کنید: (A زاویه رأس می‌باشد)

۲۸- یك زاویه و h_a

۲۹- یك زاویه و $a+b$

۳۰- یك زاویه و $b+h_a$

۳۱- یك زاویه و $|a-b|$

۳۲- یك زاویه $|b-h_a|$

۳۳- یك زاویه و محیط

۳۴- محیط و h_a

۳۵- a و r

۳۶- a و R

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با معلومهای زیر رسم کنید: ($\hat{A} = ۹۰°$)

۳۷- B و $b+c$

۳۸- B و $|b-c|$

۳۹- b و $a+c$

۴۰- b و $a-c$

۴۱- b و r

۴۲- b و r_a

۴۳- b و r_b

۴۴- b و r_c

۴۵- b و d_a

۴۶- h_a و m_a

۴۷- ضلع c و d_c

۴۸- ضلع c و h_a

۴۹- ضلع c و d_a

۵۰- ضلع c و m_a

۵۱ـ ضلع c و r

۵۲ـ ضلع c و r_a

۵۳ـ زاویه c و r_c

مثلث ABC را با معلومهای زیر رسم کنید:

۵۴ـ a و A و bc

۵۵ـ b و c و d_a

۵۶ـ a و h_a و $b^۲+c^۲=k^۲$

۵۷ـ a و h_a و $b^۲-c^۲=k^۲$

۵۸ـ A و $۲P$ و h_a

۵۹ـ r و r_a و d_a

۶۰ـ r و r_a و $b-c$

۶۱ـ a و r و $b+c$

۶۲ـ a و r و $b-c$

۶۳ـ A و r_a و $۲P$

۶۴ـ a و m_a و $B-C=\alpha$

۶۵ـ h_a و r و $۲P$

۶۶ـ a و r_b و r_c

۶۷ـ r_a و r_b و $a+b$

۶۸ـ r_a و r_c و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$

۶۹ـ A و a و h_b

۷۰ـ A و a و $b+c$

۷۱ـ A و a و $|b-c|$

۷۲ـ A و b و R

۷۳ـ A و b و m_a

۷۴ـ A و b و d_a

۷۵ـ A و b و h_a

۷۶ـ A و h_a و h_b

۷۷ـ A و h_b و m_a

۷۸ـ a و h_b و R

۷۹ـ h_a و m_a و R

۸۰ـ B و h_a و m_a

۸۱ـ مثلث ABC را رسم کنید که ازآن طول ضلع a، زاویه A و نقطه D پای نیمساز زاویه داخلی A معلوم می‌باشد.

۸۲ـ از مثلث ABC، m_b و m_c و زاویه میانه AM با ضلع BC داده شده است مثلث را رسم کنید.

۸۳ـ از مثلث ABC، a و b و m_c داده شده مثلث را رسم کنید.

۸۴ـ مثلث ABC را رسم کنید که از آن طول ضلع a و m_b و نقطه D پای نیمساز داخلی زاویه A معلوم می‌باشد.

۸۵ـ مثلث ABC را رسم کنید که از آن زاویه A، و ضلع c و اندازه زاویه میانه AM با ضلع BC معلوم است.

۸۶ـ از مثلث ABC، اندازه‌های دوزاویه و مجموع اندازه‌های سه ارتفاع معلوم است مثلث را رسم کنید.

۸۷ـ اندازه شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده مثلث را رسم کنید.

۸۸ـ ازمثلث متساوی‌الاضلاع ABC مجموع ارتفاع وشعاع دایرهٔ محاطی‌آن معلوم است مثلث را رسم کنید.

۸۹ـ ازمثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC، اختلاف طولهای وتر وارتفاع نظیر آن معلوم است مثلث ر رسم کنید.

۹۰ـ از مثلث ABC، h_a و h_b و $\frac{a}{c}=k$ معلوم‌است‌مثلث‌را رسم کنید«راهنمایی‌ـ از $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}$ استفاده کنید.»

۹۱ـ از مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(\hat{A}=۹۰)$، h_a و $\frac{c^۲}{b^۲}=k$ داده شد مثلث را رسم کنید.

۹۲ـ مثلث‌قائم‌الزاویه ABC را بامعلوم‌بودن محیط و نسبت دوقطعه وتر که به‌وسیله ارتفاع جدا می‌شود رسم کنید.

۹۳ـ از مثلث ABC، زاویه A و R و $\frac{a}{h_a}=K$ داده شده مثلث را رسم کنید.

۹۴ـ از مثلث ABC، d_a و $\frac{b}{c}=k$ و زاویه بین میانه AM و ضلع AB داده شده مثلث را رسم کنید.

۹۵ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در یك مربع معلوم محاط کنید بطوریکه یکی از رأس‌های مثلث بر رأس مربع واقع باشد.

۹۶ـ از مثلث ABC، رأس A و نقطه M وسط BC و H محل تلاقی سه ارتفاع معلوم‌است مثلث را رسم کنید «راهنمایی اگر O مرکز دایره محیطی مثلث باشد ابتداء ثابت کنید $AH=۲OM$ و از این تساوی برای رسم مثلث استفاده کنید».

۹۷ـ در مثلث ABC، ضلع a و h_a داده شده و $\hat{B}=۲\hat{C}$ می‌باشد مثلث را رسم کنید.

۹۸ـ از مثلث ABC اندازه دو زاویه و شعاع دایره محاطی داده شده‌است مثلث‌را رسم کنید.

۹۹ـ از مثلث ABC، h_a و a داده شد و نیمساز AD واسطه هندسی بین قطعه خطهای BD و DC می‌باشد. مثلث را رسم کنید. «راهنمایی: نیمساز AD دایره محیطی را در E قطع‌می‌کندبنا به‌فرض $AD^۲=BD\cdot DC$ وازطرف‌دیگر $AD\cdot DE=BD\cdot DC$ درنتیجه $AD=DE$، اگراز E عمودی بر BC فرودآید وپای عمود F باشد $FF=AH$ است و...»

III- رسم چهارضلعی‌ها

۱۰۰- اندازه قطر مربعی در دست است مربع را رسم کنید.

۱۰۱- از یك مربع رأس A و خط Δ که قطر مربع بر آن منطبق است داده شده مربع را رسم کنید.

۱۰۲- مربعی رسم کنید که از آن یك رأس و خط D که ضلع مربع منطبق بر آن می‌باشد داده شده است.

۱۰۳- از یك مربع نقطه O مرکز و خط Δ که یك ضلع بر آن منطبق است داده شده مربع را رسم کنید.

۱۰۴- از مربعی نقطه O مرکز و خط Δ که موازی با یك قطر مربع است و اندازه ضلع مربع داده شده مربع را رسم کنید.

۱۰۵- از مربع $ABCD$، رأس A و نقطه M وسط ضلع DC داده شده مربع را رسم کنید.

۱۰۶- سه خط متوازی D و D' و D'' داده شده مربع $ABCD$ را چنان رسم کنید که رأس B از آن نقطه معلوم واقع برخط D باشد و رأسهای A و C به‌ترتیب بر خطهای D' و D'' واقع باشند «راهنمایی - از دوران خط D' حول نقطه B به‌زاویه 90° استفاده کنید».

۱۰۷- رأس A از مربع $ABCD$ و دوخط متوازی Δ و Δ' که رأس‌های مقابل B و D بر آن واقع‌اند داده شده مربع را رسم کنید.

۱۰۸- از مربعی رأس A معلوم است و رأس‌های B و D بر دوخط متقاطع Δ و Δ' واقع است مربع را رسم کنید.

۱۰۹ــ از مربعی نقطه O مرکز و دو نقطه E و F واقع بر دوضلع متوالی AB و AD معلوم است آن را رسم کنید.

۱۱۰ــ مربعی رسم کنید که سه‌رأس آن روی سه‌خط متوازی واقع شود. «راهنمایی‌ــ یکی از رأس‌ها را روی یکی از خطهای موازی انتخاب کرده و از دوران استفاده کنید».

۱۱۱ــ درمربع ABCD مثلث متساوی‌الاضلاع AMN را چنان محاط کنید که M بر BD و N برCD واقع شود. »راهنمایی ــ از دوران ضلع BC حول نقطه A با زاویه ۶۰° استفاده کنید».

۱۱۲ــ ازمربع مستطیلی اندازه یك‌ضلع و یك‌قطر داده‌شده‌است مستطیل را رسم کنید.

۱۱۳ــ طول یك قطر و فاصله یك رأس تا قطر از مستطیلی داده شده است مستطیل را رسم کنید.

۱۱۴ــ مربع‌مستطیل ABCD را چنان رسم کنید که ضلعهایش به‌ترتیب بر چهار نقطه M و N و S و T بگذرد و ضلع AB به‌طول معیین l باشد.

۱۱۵ــ از مستطیل ABCD، محیط و $\frac{AB^{2}}{AC^{2}}=K^{2}$ داده شده آن‌را رسم کنید.

۱۱۶ــ در مربع مفروض به‌ضلع a مستطیلی به‌طول قطر l محاط کنید.

۱۱۷ــ از یك لوزی طولهای یك قطر و یك ضلع داده شده آن را رسم کنید.

۱۱۸ــ از یك لوزی اندازه یك قطر و فاصله مرکز تا یك ضلع داده شده آن را رسم کنید.

۱۱۹ــ ازیك لوزی یك ضلع و فاصله مرکز تا یك ضلع داده‌شده‌آن را رسم کنید.

۱۲۰ــ از یك لوزی طول یك قطر و نسبت بین اندازه‌های دوقطر داده شده لوزی را رسم کنید.

۱۲۱ دو لوزی ABCD، رأس A و یك زاویه، و از دوضلع آن‌که از رأس A نمی‌گذرند دو نقطه معلوم M و N داده شده لوزی را رسم کنید. «راهنمایی ــ از کمان درخور زاویه معلوم داده شده نظیر بوتر MN استفاده کنید».

۱۲۲ــ دوضلع یك لوزی از دونقطه معلوم M و N می‌گذرند و دو ضلع دیگر آن روی دوخط متوازی Δ و Δ' واقع‌اند لوزی‌را رسم کنید «راهنمایی‌ــ ارتفاع لوزی مساوی با فاصله دوخط متوازی است و...»

۱۲۳ــ از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های دوضلع و اندازه یك زاویه داده شده آن را رسم کنید.

۱۲۴ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که ازآن طولهای یك قطر و یك ضلع و اندازه یك زاویه داده شده است. حالت‌های مختلف مسئله را بررسی کنید.

۱۲۵ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که از آن اندازه یك زاویه و فاصله ضلعهای مقابل از یکدیگر معلوم است.

۱۲۶ــ از متوازی‌الاضلاعی زاویه بین دوقطر و اندازه‌های دو قطر داده شده آن را رسم کنید.

۱۲۷ــ متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم کنید که از آن S مساحت و K و K' نسبتهای ضلع AB به‌دو قطر معلوم است.

۱۲۸ــ درمتوازی‌الاضلاع مفروض، مربعی محاط کنید.

۱۲۹ــ از ذوزنقه‌ای اندازه‌های دوقاعده و دوقطر معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۳۰ــ از ذوزنقه‌ای طولهای یك قاعده، ساقها و ارتفاع داده شده است ذوزنقه‌را رسم کنید «در تعداد جوابها بحث کنید».

۱۳۱ــ ذوزنقه‌ای رسم کنید که طولهای دوقطر، زاویه بین دوقطر و مجموع یك‌قاعده و یك ساق معلوم است.

۱۳۲ــ ذوزنقه‌ای با معلومهای زیر رسم کنید. اندازه‌های دوقطر، طول قطعه خطی که وسطهای دوقطر را به‌هم و طول قطعه خطی که وسطهای دوساق را بهم وصل می‌کند.

۱۳۳ــ در دایره مفروض (R و O) ذوزنقه‌ای محاط کنید که اندازه ارتفاع وتفاضل دوقاعده آن معلوم است.

۱۳۴ــ چهارضلعی ABCD را رسم کنید که از آن اندازه‌های دوقطر و زاویه بین آنها واندازه‌های دو زاویه مجاور A و D معلوم است.

۱۳۵ــ چهارضلعی ABCD را رسم کنید که از آن اندازه‌های دوقطر و زاویه بین آنها و نسبت دوضلع AB و BC و مجموع مربعهای دوضلع AB و AD معلوم است.

۱۳۶ــ چهارضلعی‌را رسم کنید که از آن اندازه‌های سه زاویه ومحیط ونسبت دوضلع مجاور $K=\frac{AB}{AD}$ معلوم است.

۱۳۷ــ سه رأس یك چهارضلعی که محیطی و محاطی می‌باشد معلوم است آن را رسم کنید «راهنمایی ــ از خاصیت چهار ضلعی محیطی و رسم مثلثی که ازآن یك ضلع و زاویه روبروی به این ضلع و تفاضل دوضلع دیگر معلوم باشد استفاده کنید».

۱۳۸ــ قطرها و زاویه‌های یك‌چهارضلعی‌داده شده‌است، آن‌را رسم کنید. «راهنمایی ــ کمان درخور زاویه A نظیر به وتر BD را رسم کرده و نقطه A را بطور دلخواه بر آن بگیرید. از نقطه A مماسی بر دایره حاصل رسم کنید. در دوطرف رأس A زاویه $\hat{B}$ و زاویه $\hat{D}$ را بسازید.»

۱۷- دایره

۱۳۹- در دایره مفروض $(R \text{ و } O)$ مربع مستطیلی محاط کنید که محیط آن مقدار معلوم $2P$ باشد.

۱۴۰- دایره‌ای با شعاع معلوم رسم کنید که بردونقطه مفروض بگذرد.

۱۴۱- سه دایره متساوی مفروض است. نقطه‌ای تعیین کنید که مماسهای رسم شده از این نقطه بر سه دایره دارای طولهای برابر باشد.

۱۴۲ دایره‌ای رسم کنید که بر دایره مفروض C به مرکز O و به‌شعاع R بر خط مفروض D در نقطه معیین مماس باشد.

۱۴۳- بر نقطه مفروض A دایره‌ای به‌شعاع R به‌قسمی رسم کنید که مماس رسم شده از نقطه A' بر این دایره برابر با طول معیین l باشد.

۱۴۴- بر دونقطه مفروض A و B دوخط چنان رسم کنید که با یکدیگر زاویه معیین ساخته و از دایره مفروض C به مرکز O و به‌شعاع R دو وتر به‌طولهای برابر جدا کنند.

۱۴۵- نقطه M را چنان تعیین کنید که از آن دودایره مفروض C و C' به‌مرکزهای O و O' به زاویه‌های معلوم دیده شوند.

۱۴۶- در دایره مفروض C وتر D به طول معلوم l را چنان رسم کنید که تصویر وتر مفروض AB بر آن برابر با مقدار معلوم a باشد.

۱۴۷- دایره C به‌مرکز O و شعاع R و خط D و نقطه A واقع بر آن مفروض است. دایره C' را چنان رسم کنید که بر دایره C و در A بر خط D مماس باشد.

۱۴۸- خط D ودایره $(R \text{ و } O)$ و نقطه A روی دایره داده‌شده، دایره‌ای رسم کنید که بر نقطه A بگذرد و برخط D مماس باشد. «شرط امکان مسئله را در وضع‌های مختلف خط و دایره بررسی کنید».

۱۴۹ــ درزاویه مفروض xAy دایره‌ای چنان محاط کنیدکه ازنقطه مفروضB واقع برنیمساز زاویه بگذرد. «راهنمایی ــ از B عمودی بر Az نیمساز زاویه xAy رسم کنید و...»

۱۵۰ــ دو دایره C و C' درنقطه A مشترك‌اند. قاطع MAN را چنان رسم کنید که $\frac{AM}{AN}=K$ باشد «راهنمایی ــ از تجانس به‌مرکز A و نسبت K استفاده کنید و...»

۱۵۱ــ دایره C و نقطه A روی آن مفروض است. در این دایــره وتـر AA' را چنان‌رسم کنیدکه وترمعلومDE را در I قطع کندبه‌قسمی که $IA'=۳AI$ باشد«راهنمایی‌ــ نقطه I محل تلاقی DE بــا دایره C' مجانس دایره C در تجانس بــه مرکز A و نسبت $\frac{AI}{AA'}=\frac{۱}{۴}$ است».

۱۵۲ــ دو دایره‌که دارای یك مرکزاند داده شده است قاطعی چنان رسم کنیدکه از دایره بزرگتر، وتری دوبرابر وتر دایره کوچکتر جدا کند.

۱۵۳ــ دو دایره C و C' ویك نقطه I مفروض است دومماس متوازی براین‌دودایره چنان رسم کنیدکه نسبت فاصله‌های آنها از I مقدار معیین K باشد. «راهنمایی ــ ازمجانس دایره C در تجانس به مرکز I و نسبت K و سپس از تقارن به‌مرکز I استفاده‌کنید».

۱۵۴ــ دایره‌ای رسم کنیدکه برنقطه معیینی بگذرد وبر دو دایره مفروض مماس‌شود.

۱۵۵ــ دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر سه دایره مفروض مماس شود.

۱۵۶ــ دایره (R و O) و دونقطه A و B بر آن مفروض است نقطه‌ای مانند C بر دایره چنان بیابیدکه وترهای CA وCB قطرمعیینی از دایره را درنقطه M و N قطع‌کند بطوری‌که $OM=ON$ باشد.

۱۵۷ــ دایـره (R و O) و نقطه A بـر آن مفروض است مماس D را بر آن رسم می‌کنیم. به‌رأس O زاویه‌ای چنان رسم‌کنید که اگر M و N نقطه‌های تلاقی ضلعهای آن با D باشد نسبت $AM:AN=K$، و OA نیمساز زاویه $\widehat{MON}$ باشد

۱۵۸ــ دایره (L) را چنان رسم‌کنیدکه محیط هریك از دو دایره مفروض C و C' به‌مرکزهای O و O' و به‌شعاعهای R و R' را نصف کند و از نقطه مفروض A بگذرد. «راهنمایی ــ مرکز دایره (L) روی‌مکان‌هندسی نقطه‌هایی‌است‌که تفاضل‌مربعهای‌فاصله‌های آنها از دونقطه ثابت O و O' برابر با مقدار ثابت $R^۲-R'^۲$ می‌باشد و...»

۱۵۹ ــ دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو دایرهٔ و یك خط مفروض مماس شود.

آنچه در تألیف این کتاب مورد استفاده بوده است

۱ـ یادداشت‌های مؤلف از ترسیمهای هندسی در مدت ۲۰ سال تدریس ریاضیات در دبیرستانها.

۲ـ مجله‌های یکان سال ۱۳۴۷: مطالب مربوط به ترسیمات هندسی ـ ترجمه آقای عبدالحسین مصحفی.

۳ـ کتاب ریاضیات مدارس متوسط. تالیف آقای میرزامحسن‌خان هنربخش.

۴ـ کتاب هندسه سال چهارم دبیرستان (نظام آموزشی سابق). تالیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب واحمد ارشمید.

۵ـ کتابهای هندسه دوره دبیرستان (نظام آموزشی سابق) وحل المسایل هندسه. تالیف آقایان صفاری وقربانی.

۶ـ کتاب حل المسایل هندسه برای سال چهارم دبیرستان (نظام آموزشی سابق). مجموعه علوم.

۷ـ کتاب دوره‌های کنکور ـ هندسه ومخروطات. تالیف آقای جعفرحیدری ثانی.

۸ـ کتاب ریاضیات. تالیف آقایان عسجدی ومصحفی.

۹ـ کتاب المپیاد ریاضی مجارستان. ترجمه آقایان پرویزشهریاری وابراهیم عادل

10– E'LE'MENTS de GE'OME'TRIE.

11– COURS de GE'OME'TRIE E'LE'MENTAIRE.